משוואות דיפרנציאליות רגילות, מועד א'.
אוניברסיטת בן גוריון

<table>
<tr>
<td>
מספר הקורס: 201.1.0061
מרצה: ד. קרנר
תאריך: 11.07.2021
משך המבחן: 3 שעות
ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות)
אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבונים
</td>
<td>
<u>כללים</u> : אסור לכתוב בצבע אדום.
הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק ולא ארוך. בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?" , "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של.."
</td>
</tr>
</table>

<u>יש לנמק היטב את כל התשובות.</u>

1. (20 נקודות) נתבונן במד"ר $(1+x^2)x' = (5+\sqrt[3]{sin(x)})\cdot(x^2-1)$ עם תנאי התחלה $x(t_0)=x_0$.

i. עבור אילו תנאי התחלה קיים פתרון מקומי?

ii. עבור אילו תנאי חתחלה קיים פתרון אנליטי (ליד t_0)?

iii. עבור אילו תנאי התחלה קיים פתרון גלובלי $x(t)\in C^1(\mathbb{R})$?

iv. עבור אילו תנאי התחלה הפתרון מונוטוני? חסום?

v. עבור כל נקודת שיווי משקל בדקו את (אי-)יציבות.

2. (16 נקודות) נתבונן במשוואה $fdx+gdy=0$, כאן $f,g\in C^1(\mathcal{U})$.
הוכיחו: למשוואה קיים גורם אינטגרציה מהצורה $\lambda(\frac{x}{y})$ אמ"מ $y^2\cdot\frac{\partial_y f-\partial_x g}{x\cdot f+y\cdot g}$ הינה פונקציה הומוגנית מסדר 0.

3. (16 נקודות) נניח שפונקציה $f(t,x)\in C^0((a,b)\times\mathbb{R}^2)$ מקיימת: $|f(t,x)|\le g(t)\cdot(1+|x|)$, כאן $g(t)\in C^0(a,b)$.
הוכיחו: כל פתרון מקומי של מד"ר $x'=f(t,x)$ מתרחב לפתרון גלובלי, $x(t)\in C^1(a,b)$.

4. (16 נקודות) מצאו את הפתרון הכללי <u>ממשי</u> של המשוואה $x''-x'-2x=e^t\cdot cos(t)$.

5. (16 נקודות) יהי $x(t)$ פתרון לא אפסי של משוואה $x'=x\cdot f(t,x)$, כאן $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$. הוכיחו: ל $x(t)$ אין אפסים.

6. (16 נקודות) יהי $x(t)$ פתרון של מד"ר $x''+t\cdot x=0$, $x(0)=x_0$.
לכל $\epsilon, s>0$ נסמן ע"י $N_{s,\epsilon}$ את מספר האפסים של $x(t)$ בקטע $(s,s+\epsilon)$.
הוכיחו: $\lim_{s\to\infty}N_{s,\epsilon}=\infty$ עבור כל $\epsilon>0$.

בהצלחה!