

משוואות דיפרנציאליות רגילות, בוחן אמצע.

אוניברסיטת בן גוריון

<p>כללים : אסור לכתוב בצבע אדום. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".</p>	<p>מספר הקורס: 201.1.0061 מרצה: ד. קרנר תאריך: 13.05.2021 משך המבחן: 3 שעות ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות) אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבוני</p>
--	---

יש לנמק היטב את כל התשובות.

1. נתבונן במד"ר $(1 + x^2)x' = (5 + \sqrt[3]{\sin(x)})(x^2 - 1)$ עם תנאי התחלה $x(t_0) = x_0$

i. עבור אילו תנאי התחלה קיים פתרון מקומי?

ii. עבור אילו תנאי התחלה הפתרון אנליטי (ליד t_0)?

iii. עבור אילו תנאי התחלה קיים פתרון גלובלי $x(t) \in C^1(\mathbb{R})$?

iv. עבור אילו תנאי התחלה הפתרון מונוטוני? חסום?

v. עבור כל נקודת שיווי משקל בדקו (אי-)יציבות.

2. (10 נקודות) פתרו את המשוואה $x' = e^{\frac{x}{t}} + \frac{x}{t}$, $x(-e) = 0$. מצאו את התחום הגדרה המכסימלי של הפתרון.

3. (10 נקודות) יהי $x(t)$ פתרון לא אפסי של משוואה $x' = x \cdot f(t, x)$, כאן $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$. הוכיחו: ל $x(t)$ יש מספר אפסים סופי בכל קטע סופי.

4. (10 נקודות) נתבונן במשוואה $fdx + gdy = 0$, כאן $f, g \in C^1(\mathcal{U})$. הוכיחו: למשוואה קיים גורם אנטגרציה מהצורה $\lambda(\frac{x}{y})$ אם $M = \frac{\partial_x f - \partial_x g}{x \cdot f - y \cdot g}$ הינה פונקציה הומוגנית מסדר 0.

5. (20 נקודות) נניח שפונקציה $f(t, x) \in C^0((a, b) \times \mathbb{R}^2)$ מקיימת $|f(t, x)| \leq g(t) \cdot (1 + |x|)$, כאן $g(t) \in C^0(a, b)$. הוכיחו: כל פתרון מקומי של משוואה $x' = f(t, x)$ ניתן להרחבה לפתרון גלובלי, $x(t) \in C^1(a, b)$.

בהצלחה!