אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה: 7.2.03
שם המורה: ד"ר משביצקי, ד"ר שניידר
מבחן ב: אלגברה לינארית
מס' הקורס: 201-1-9181
מיועד לתלמידי: 364
שנה: תשס"ג סמ': א מועד: א
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: דף 1 (A4) נוסחאות, מחשבון רגיל עם צג קטן.

מס' נבחן: ______

יש לענות על 5 בדיוק מבין 6 השאלות הבאות.
משקל השאלות שווה.

(1) נתונה המערכת

$$\begin{cases} 2mx + y + z = 2 \\ x + 2my + z = 4m \\ x + y + 2mz = 2m^2 \end{cases}$$

מצאו עבור אילו ערכים של m, $m \in \mathbb{R}$, למערכת הנ"ל:

7 נק (א) יש פתרון יחיד, יש למצוא אותו
8 נק (ב) יש אין סוף פתרונות, יש למצוא פתרון כללי.
5 נק (ג) אין פתרון

(2) נתון תת מרחב V של מרחב וקטורי $M_{2\times2}(\mathbb{R})$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a+b-c=0,\ b-c+d=0 \right\}$$

10 נק (א) מצאו בסיס ומימד של V
10 נק (ב) מצאו תת מרחב W של מרחב וקטורי $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ כך ש $V+W=M_{2\times2}(\mathbb{R})$ ו $V\cap W=\{0\}$

(3) נתונים תתי מרחבים U ו W של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$

$$W=\left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ a & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b\in\mathbb{R} \right\}, \quad U=\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a+b & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b\in\mathbb{R} \right\}$$

10 נק (א) מצאו בסיס ומימד של $U+W$
10 נק (ב) מצאו בסיס ומימד של $U\cap W$

(4) נתונה פונקציה L מ $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ ל $M_{2\times2}(\mathbb{R})$, $L(A)=A^t+A$
כאשר A^t היא מטריצה משוחלפת ל A.

7 נק (א) בדקו כי L הוא אופרטור לינארי
7 נק (ב) מצאו בסיס ומימד של $Ker(L)$
6 נק (ג) מצאו בסיס ומימד של $Im(L)$.

⑤ נתון אופרטור ליניארי $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

ידוע כי $T(1,1,2)=T(1,1,1)=(1,0,0)$, $T(1,2,2)=(0,0,1)$

8 נק' (א) מצאו בסיס ומימד של ImT ושל $kerT$

7 נק' (ב) מצאו מטריצה של T בבסיס סטנדרטי

5 נק' (ג) מצאו מטריצה של T בבסיס $\bar{a}_1=(1,1,2)$, $\bar{a}_2=(1,1,1)$, $\bar{a}_3=(1,2,2)$

⑥ נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

8 נק' (א) מצאו ערכים עצמיים של A ומרחבים עצמיים של A.

7 נק' (ב) חשבו A^{100}

5 נק' (ג) מצאו מרחבים עצמיים של (A^2+I) כאשר $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. נמק.

בהצלחה!

פתרון של מטלה 1

1 נדרג מטריצה מורחבת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2m & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2m & 1 & 4m \\ 1 & 1 & 2m & 2m^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2m & 2m^2 \\ 0 & (2m-1) & (1-2m) & 4m-2m^2 \\ 0 & 1-2m & 1-4m^2 & 2-4m^3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2m & 2m^2 \\ 0 & 2m-1 & 1-2m & 4m-2m^2 \\ 0 & 0 & (1-2m)2(1+m) & 2(1+2m)-2m^2(1+2m) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2m & 2m^2 \\ 0 & 2m-1 & 1-2m & 2m(2-m) \\ 0 & 0 & 2(1-2m)(1+m) & \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2m & 2m^2 \\ 0 & 2m-1 & 1-2m & 2m(2-m) \\ 0 & 0 & (1-2m)\cdot 2(1+m) & 2(1+2m)(1-m)(1+m) \end{array}\right)$$

(א) אם $m \neq -1$ ו $m \neq \frac{1}{2}$ אז יש פתרון יחיד

$$z = \frac{(1+2m)(1-m)}{1-2m} = \frac{1+m-2m^2}{1-2m}$$

לכן $-y+z = \frac{2m(2-m)}{1-2m}$

$$y = \frac{1+m-\cancel{2m^2}-4m+\cancel{2m^2}}{1-2m} = \frac{1-3m}{1-2m}$$

$$x = 2m^2 - y - 2m\cdot z = \frac{2m^2(1-2m)-1+3m-2m-2m^2+4m^3}{1-2m} =$$

$$= \frac{m-1}{1-2m}$$

פתרון יחיד הוא $\left(\frac{m-1}{1-2m}, \frac{1-3m}{1-2m}, \frac{1+m-2m^2}{1-2m}\right)$

(ב) אם $m=-1$ אז יש אינסוף פתרונות

המטריצה בצורה מדורגת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

z הוא משתנה חופשי

$x = 2+2\alpha-2-\alpha = \alpha$, $y = 2+z = 2+\alpha$, $z=\alpha$

$(\alpha, 2+\alpha, \alpha)$ הוא פתרון כללי

(ג) אם $m=\frac{1}{2}$ אז אין פתרון

פתרון שאלה 2

(א) $V=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \middle|\ a+b-c=0,\ b-c+d=0\right\}$

מרחב V_1 של קואורדינטות של וקטורים מ V הוא מרחב פתרונות של מ.מ.ל. הומוגנית עם מטריצת מקדמים

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array}$$
$$\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$$

לכן משתנים חופשיים הם c,d

לכן וקטורים $(0\ 1\ 1\ 0)$, $(1,-1,0\ 1)$ מהווים בסיס של V_1

לכן וקטורים $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ מהווים בסיס של V

$\dim V=2$

(ב) כדי להשלים בסיס של V לבסיס של $M_{2x2}(\mathbb{R})$ נשלים בסיס של V_1 (מסעיף (א)) לבסיס של $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(*) לכן וקטורים $\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ מהווים בסיס של $M_{2x2}(\mathbb{R})$

נגדיר $W=Span\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$

מפני ש תת מרחב $V+W$ מכיל את הבסיס של $M_{2x2}(\mathbb{R})$ נקבל כי $V+W=M_{2x2}(\mathbb{R})$

$\dim(W)=\dim(V)=2$

לכן $\dim(V\cap W)=\dim(V)+\dim(W)-\dim(V+W)=0$

לכן $V\cap W=\{0\}$

פתרון של שאלה 3

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ a+b & a\end{pmatrix}\right\}=\left\{a\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}=Span\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)$$

$$W=\left\{\begin{pmatrix} a+b & b\\ a & a\end{pmatrix}\right\}=\left\{a\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}=Span\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$$

לכן $$U+W=Span\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)$$

וקטורים האלה הם בת"ל מפני ש

$$(*)\quad \begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

לכן וקטורים $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ מהווים בסיס של $U+W$

ו- $\dim(U+W)=3$

וגם מ-$(*)$ נובע גם כי $\dim(U)=2$ ו- $\dim(W)=2$

לכן $\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U+W)=1$

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\in U\cap W$$

לכן $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ מהווה בסיס של $U\cap W$

<u>הערה</u> לחישוב של בסיס ומימד של $U\cap W$ ניתן גם להשתמש בהצגה של U ו- W כמרחבים פתרונות של מע.ל.

$$U=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\middle|\ y=0,\ x=t\right\}$$

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\middle|\ z=t,\ z+y=x\right\}$$

אז $$U\cap W=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\middle|\ y=0,\ x=t,\ z=t,\ x=z+y\right\}$$

פתרון שאלה 4

(א) $A=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{pmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

$$(A+B)^t=\begin{pmatrix}a_1+b_1&a_2+b_2\\a_3+b_3&a_4+b_4\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}a_1+b_1&a_3+b_3\\a_2+b_2&a_4+b_4\end{pmatrix}$$

לכן $L(A+B)=(A+B)^t+A+B=A^t+A+B^t+B=L(A)+L(B)$

$$L(\alpha A)=(\alpha A)^t+\alpha A=\alpha A^t+\alpha A=\alpha(A^t+A)=\alpha L(A)$$

לכן L הוא אופרטור לינארי.

(ב) $A\in\operatorname{Ker}L \iff L(A)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \iff A^t+A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix}a_1&a_3\\a_2&a_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2a_1=0\\a_2+a_3=0\\2a_4=0\end{cases}$$

a_3 הוא משתנה חופשי $\quad a_1=a_4=0\ \ a_2=-1,\ a_3=1$

לכן מטריצה $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ מהווה בסיס של $\operatorname{Ker}(L)$

$\dim(\operatorname{Ker}(L))=1$

(ג) $\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3,\bar e_4$ בסיס סטנדרטי של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$

לכן $\operatorname{Im}(L)=\operatorname{Span}(L(\bar e_1),L(\bar e_2),L(\bar e_3),L(\bar e_4))$

$=\operatorname{Span}(2\bar e_1,\ \bar e_2+\bar e_3,\ 2\bar e_4)$

וקטורים האלה הם בת"ל מפני ש $\bar e_1,\dots,\bar e_4$ בסיס

לכן וקטורים $\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$ מהווים בסיס של $\operatorname{Im}(L)$

$\dim(\operatorname{Im}(L))=3!$

פתרון של שאלה 5.

(א) לפי הנתון $(0,0,1),(1,0,0)\in ImT$ לכן $\dim(Im(T))\geq 2$

$(1,1,2)-(1,1,1)=(0,0,1)\in KerT$ לכן $\dim(Ker(T))\geq 1$

$$\dim(Im(T))+\dim(KerT)=\dim(\mathbb{R}^3)=3$$

לכן $\dim(ImT)=2$ ו $\dim(KerT)=1$

לכן וקטורים $(1,0,0)$ ו $(0,0,1)$ מהווים בסיס של ImT

ו $(0,0,1)$ מהווה בסיס של $KerT$

(ב)

$$T((1,0,0))=T(2(1,1,1)-(1,2,2))=2(1,0,0)-(0,0,1)=(2,0,-1)$$
$$T((0,1,0))=T((1,2,2)-(1,1,2))=(0,0,1)-(1,0,0)=(-1,0,1)$$
$$T((0,0,1))=T((1,1,2)-(1,1,1))=(1,0,0)-(1,0,0)=(0,0,0)$$

לכן מטריצה $[T]_e$ היא:

$$[T]_e=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

(ג)

$$T(\bar{a}_1)=T((1,1,2))=(1,0,0)=2(1,1,1)-(1,2,2)=2\bar{a}_2-\bar{a}_3$$
$$T(\bar{a}_2)=T((1,1,1))=(1,0,0)=2\bar{a}_2-\bar{a}_3$$
$$T(\bar{a}_3)=T((1,2,2))=(0,0,1)=(1,1,2)-(1,1,1)=\bar{a}_1-\bar{a}_2$$

לכן

$$[T]_a=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&2&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

פתרון שאלה 6

(א)

$$|A-xI| = \begin{vmatrix} -4-x & -3 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$$

ע"ע הם $\alpha_1=-1$ ו $\alpha_2=-3$

מרחב עצמי ששייך ל $\alpha_1=-1$ הוא מרחב פתרונות V_{-1}
של ממ"ה עם מטריצת מקדמים $\begin{pmatrix}-3 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
x_2 חופשי לכן $(-1,1)$ בסיס של V_{-1}

מרחב עצמי ששייך ל $\alpha_2=-3$ הוא מרחב פתרונות V_{-3}
של מ.מ.ה עם מטריצת מקדמים $\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$
x_2 חופשי לכן $(-3,1)$ בסיס של V_{-3}

(ב) מסעיף (א) נובע כי ל $D=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ ו $P=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ מקבלים
$D=P^{-1}AP$ לכן $A=PDP^{-1}$ לכן $A^{100}=PD^{100}P^{-1}$

P^{-1}
$$\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & -3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$A^{100}=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -3^{101}\\ 1 & 3^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}(1-3^{101}) & -\frac{3}{2}(1-3^{100})\\ \frac{1}{2}(1-3^{100}) & \frac{3}{2}(1-3^{99})\end{pmatrix}$$

(ג) אם u הוא ו"ע של A ששייך לע"ע α, אז $Au=\alpha u$

אז $(A^2+I)u = A(\alpha u)+u =$
$=(\alpha^2+1)u$

לכן u הוא גם ו"ע של A^2+I ששייך לע"ע (α^2+1)
לכן ל A ול A^2+I יש אותם מרחבים עצמיים

$V_{10}=Span((-3,1))$ ו $V_2=Span((-1,1))$