1 נתונה מערכת משוואות ליניאריות
$$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+kx_2+x_3+x_4=1\\ x_1+x_2+kx_3+x_4=1\\ x_1+x_2+x_3+kx_4=1\end{cases}$$

א) עבור אילו ערכים של הפרמטר **k** למערכת

א1) יש פתרון יחיד, (א2) אין פתרונות, (א3) יש אינסוף פתרונות ?

ב) נניח k=1 מצאו בסיס ומימד של מרחב פתרונות של מערכת משוואות ליניאריות הומוגניות המתאימה למערכת הנתונה.

ג) נניח k=0. מצאו קואורדינטות של ווקטור $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ בבסיס $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

ד) עבור אילו ערכים של הפרמטר **k** ווקטור $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ **שייך ל** $Span\left(\begin{pmatrix}k\\1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\k\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\k\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\k\end{pmatrix}\right)$

2 א) נתונות מטריצות $A=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$ ו $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$ פתרו את המשוואה $AX=B$

ב) נתונה מטריצה $D=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ וידוע כי $\det(D)=\det\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=5$

מצאו **ב1)** $\det(2(D^T)^{-1}D^2)$ **ב2)** $\det\begin{pmatrix}a-2b&a+3b\\c-2d&c+3d\end{pmatrix}$

3 אופרטור ליניארי $T:R^3\to R^3$ מוגדר על-ידי נוסחה $T(x,y,z)=(3x-y+z,x-z,8x-2y)$

א) מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{Im(T)}$ ושל $\mathrm{Ker(T)}$

ב) מצאו מטריצה $[T]_u$ של אופרטור T בבסיס $(u)=\left(u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

ג) מצאו $T^3(x,y,z)$

4 U ו W הם תתי מרחבים של מרחב פולינומים $R_4[x]=\{ax^3+bx^2+cx+d \mid a,b,c,d\in R\}$

ו $U=Span(x^3-x,x^2-1,x^3-x^2-x+1)$ $W=\{p=ax^3+bx^2+cx+d \mid p(1)=p(2)=0\}$

א) מצאו בסיס ומימד של W ושל U

ב) מצאו בסיס ומימד של $U+W$

ג) מצאו בסיס ומימד של $U\cap W$

5 **א**) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ מצאו **א1**) ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של A

א2) A^{2004} , **א3**) ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של $A-I$

ב) נתונה מטריצה $B=\begin{pmatrix} i & a & 1 \\ 0 & i & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ עבור אילו ערכים של הפרמטר a מטריצה B ניתנת ללכסון.

6 על טרנספורמציה ליניארית $T:R^3 \to R^2$ ידוע כי $T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ ו $T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

א1) מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{Im}(T)$ ושל $\mathrm{Ker}(T)$

א2) מצאו מטריצה $[T]_e^e$ של טרנספורמציה T בבסיסים הסטנדרטיים של R^3 ושל R^2

ב) האם קיימת טרנספורמציה ליניארית $T:R^3 \to R^2$ שמקיימת תנאים

$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ ו $T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. נמקו את התשובה.

פתרון של שאלה 1 א

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & (k-1) & 0 & (1-k) & 0 \\ 0 & 0 & (k-1) & (1-k) & 0 \\ 0 & (1-k) & (1-k) & (1-k^2) & (1-k) \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & (k-1) & 0 & (1-k) & 0 \\ 0 & 0 & (k-1) & (1-k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-k)(3+k) & (1-k) \end{array}\right)$$

לכן עבור $k \neq 1, k \neq -3$ יש פתרון יחיד, עבור $k=-3$ אין פתרונות, עבור $k=1$ יש אין סוף פתרונות

ב עבור $k=1$ x_1,x_2,x_3 הם משתנים חופשיים ולכן מימד הוא 3 ובסיס הוא

$$((-1\ \ 1\ \ 0\ \ 0),(-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0),(-1\ \ 0\ \ 0\ \ 1))$$

ג נציב $k=0$ **למטריצה מדורגת ונקבל** $x_4=\frac{1}{3}, x_3=\frac{1}{3}, x_2=\frac{1}{3}, x_1=\frac{1}{3}$

ד וקטור $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ ***שייך*** **ל מרחב הנתון אם ורק אם למערכת מסעיף א קיים פתרון ז"א** $k \neq -3$

פתרון של שאלה 2 א)

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} -1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & -1/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/9 & 4/9 & 1/3 \\ -1/9 & 1/9 & 1/3 \\ 5/9 & 1/9 & 1/3 \end{pmatrix}$$

ב. $|2(D^T)^{-1}D^2| = 2^2\frac{|D|^2}{|D|} = 4|D| = 20$

$$\begin{vmatrix} a-2b & a+3b \\ c-2d & c+3d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2b & a \\ -2d & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2b & 3b \\ -2d & 3d \end{vmatrix} = 0 + 3\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + 0 = 3\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 25$$

(פתרון 2 $\begin{vmatrix} a-2b & a+3b \\ c-2d & c+3d \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\right| = 5(3+2) = 25$)

פתרון של שאלה 3 א. $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ לכן

$\mathrm{Im}(T) = Span\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. ווקטורים האלה הם תלוים לינארית לכן וקטורים $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ מהווים

בסיס של $\mathrm{Im}(T)$ (כי הם בלתי תלוים לינארית) ו $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$

$Ker(T)$ הוא מרחב פתרונות של מערכת משוואות ליניאריות עם מטריצת מקדמים

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ נציב $z = 1$ (משתנה חופשי) ונחשב $x = 1, y = 4$ ונקבל

וקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ שמהווה בסיס של $Ker(T)$.

$$[T]_u = P^{-1}[T]_e P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 4 \\ 6 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

ג. מסעיף א. ניתן לקבל $[T]_e = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ואז

$$T^3(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & -24 & 21 \\ -6 & 3 & -6 \\ 138 & -42 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75x - 24y + 21z \\ -6x + 3y - 6z \\ 138x - 42y + 30z \end{pmatrix}$$

פתרון של שאלה 4 א. ווקטורים קואורדינטות $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ הם תלוים לינארית לכן וקטורים

$x^3 - x, x^2 - 1$ מהווים בסיס של U (כי הם בלתי תלוים לינארית) ו $\dim(U) = 2$

W הוא מרחב פתרונות של מערכת משוואות ליניאריות עם מטריצת מקדמים

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & -7 \end{pmatrix}$ c,d הם משתנים חופשיים. נציב $c=1,d=0$ ונחשב $a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$.

נציב $c=0,d=1$ ונחשב $a=\frac{3}{4},b=-\frac{7}{4}$. ונקבל שווקטורים $\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+x,\frac{3}{4}x^3-\frac{7}{4}x^2+1$ מהווים בסיס של W ($x^3-3x^2+2x,3x^3-7x^2+4$ מהווים בסיס של W)

ב) אחרי בדיקה של תלות לינארית מקבלים כי ווקטורים x^3-x,x^2-1,x^3-3x^2+2x מהווים בסיס של $U+W$ ו $\dim(U+W)=3$.

ג) $\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U+W)=1$. ווקטורים של U הם מצורה $p=a(x^3-x)+b(x^2-1)=(x^2-1)(ax+b)$ לכן $p(1)=0$ ול $a=1,b=-2$ גם $p(2)=0$ לכן $(x^2-1)(x-2)=x^3-2x^2-x+2\in U\cap W$ ומהווה בסיס של $U\cap W$.

(פתרון 2 לסעיף ג. נחשב מערכת משוואות שמגדירה U $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & c+a & b+d \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

ולכן $U\cap W$ מוגדר על-ידי מערכת משוואות $\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 8a+4b+2c+d=0 \\ a+c=0 \\ b+d=0 \end{cases}$ עם מטריצת מקדמים

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ לכן $a=\frac{1}{2},b=-1,c=-\frac{1}{2},d=1$ מהווים בסיס של מרחב פתרונות ווקטור x^3-2x^2-x+2 מהווה בסיס של $U\cap W$).

פתרון של שאלה 5 א. $|xI-A|=\begin{vmatrix} (x-i) & -1 & 0 \\ 0 & (x+i) & -i \\ 0 & 0 & (x-1) \end{vmatrix}=(x-i)(x+i)x$ לכן ערכים עצמיים הם $\alpha=1,\beta=i,\gamma=-i$.

ווקטורים עצמיים ששייכים ל $\alpha=1$ הם פתרונות של מערכת משוואות ליניאריות עם מטריצת מקדמים

$\begin{pmatrix} (1-i) & -1 & 0 \\ 0 & (1+i) & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ נציב $u_3=1$ (משתנה חופשי) ונחשב $u_1=\frac{1+i}{2(1-i)}=\frac{i}{2},u_2=\frac{i}{1+i}=\frac{i+1}{2}$ ונקבל

ווקטורים עצמיים $\alpha\begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ כאשר $\alpha\neq 0,\alpha\in C$.

ווקטורים עצמיים ששייכים ל $\beta=i$ הם פתרונות של מערכת משוואות ליניאריות עם מטריצת מקדמים

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2i & -i \\ 0 & 0 & (i-1) \end{pmatrix}$ נציב $u_1 = 1$ (משתנה חופשי) ונחשב $u_3 = 0, u_2 = 0$ ונקבל ווקטורים

עצמיים $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ כאשר $\alpha \neq 0, \alpha \in C$.

ווקטורים עצמיים ששייכים ל $\gamma = -i$ הם פתרונות של מערכת משוואות ליניאריות עם מטריצת מקדמים

$\begin{pmatrix} -2i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & (-i-1) \end{pmatrix}$ נציב $u_2 = 1$ (משתנה חופשי) ונחשב $u_3 = 0, u_1 = \frac{i}{2}$ ונקבל ווקטורים עצמיים $\alpha \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

כאשר $\alpha \neq 0, \alpha \in C$.

א2) $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ לכן $A^{2004} = (PDP^{-1})^{2004} = PD^{2004}P^{-1} = PIP^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

א3) ווקטור עצמי של מטריצה A ששייך ל ערך עצמי a הוא גם ווקטור עצמי של מטריצה $A-I$ ששייך ל ערך עצמי $a-1$. לכן ערכים עצמיים של $A-I$ הם $0, i-1, -i-1$ ווקטורים עצמיים של $A-I$ הם שווים לווקטורים עצמיים של A.

ב. $(x-i)^2(x-1) = \begin{vmatrix} (x-i) & -a & -1 \\ 0 & (x-i) & -2 \\ 0 & 0 & (x-1) \end{vmatrix} = |xI - B|$ לכן ערכים עצמיים הם $\beta_{1,2} = i, \beta_3 = 1$

לכן B ניתנת לליכסון אם ורק אם לערך עצמי i שייכים 2 ווקטורים עצמיים בלתי תלוים לינארית

אם ורק אם למערכת משוואות ליניאריות עם מטריצת מקדמים $\begin{pmatrix} 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & i-1 \end{pmatrix}$ יש 2 משתנים חופשיים

אם ורק אם $a = 0$.

פתרון של שאלה 6 א 1. מפני ש $\bar{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ מקבלים כי $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in Ker(T)$

ו $\dim(Ker(T)) \geq 1$. מפני ש $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ הם בלתי תלוים לינארית מקבלים כי $\dim(\mathrm{Im}(T)) \geq 2$. מפני ש

$\dim(Ker(T))+\dim(\mathrm{Im}(T))=3$ **מקבלים כי** $\dim(Ker(T))=1$ **ו** $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ **מהווה בסיס של** $Ker(T)$

ו $\dim(\mathrm{Im}(T))=2$ **ו** $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ **מהווים בסיס של** $\mathrm{Im}(T)$.

2א $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ **,** $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ **לכן** $[T]_e^e=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

ב. אם T טרנספורמציה ליניארית **אז** $T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

לכן T **לא** טרנספורמציה ליניארית