פתרונות לבוחן 5.12.03

ענו על 2 בדיוק מתוך 3 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 50 נקודות.
נמק את שלבי החישוב. רצוי לבדוק.

1.א) עבור אילו ערכים של הפרמטר k ווקטור $\begin{pmatrix}-2\\-k\\1\end{pmatrix}$ שייך ל $Span\left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}\right)$

ב) ידוע כי V הוא מרחב פתרונות של מערכת משוואות

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + kx_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

מימד של V תלוי בפרמטר k. עבור אילו ערכים של הפרמטר k המימד $\dim(V)$ הוא מקסימלי.

ג) מצאו ערך מקסימלי ו ערך מינימלי של $\dim(V)$ ל מרחב V מסעיף ב).

פתרון

א) ווקטור $\begin{pmatrix}-2\\-k\\1\end{pmatrix}$ שייך ל $Span\left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}\right)$ אם ורק אם למערכת משוואות

$\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix}-3\\2\\-4\end{pmatrix}\beta + \begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}\gamma = \begin{pmatrix}-2\\-k\\1\end{pmatrix}$ קיים פתרון. נדרג מטריצה מורחבת

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & -2\\ 1 & 2 & -3 & -k\\ 3 & -4 & -1 & 1\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & -2\\ 0 & 5 & -4 & (2-k)\\ 0 & 5 & -4 & 7\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & -2\\ 0 & 5 & -4 & (2-k)\\ 0 & 0 & 0 & (k+5)\end{pmatrix}$$

ונקבל כי ווקטור $\begin{pmatrix}-2\\-k\\1\end{pmatrix}$ שייך ל $Span\left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}\right)$ אם ורק אם $k=-5$

ב) מטריצת מקדמים של מערכת משוואות נבדלת מ מטריצה של סעיף א) רק בסימן של עמודה אחרונה לכן צורה מדורגת שלה היא $\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 5 & -4 & (k-2)\\ 0 & 0 & 0 & (-k-5)\end{pmatrix}$. ידוע כי $\dim(V)$ שווה למספר משתנים חופשיים. ל $k=-5$ יש 2 משתנים חופשיים ו $\dim(V)$ הוא מקסימלי.

ג) לפי סעיף ב) ערך מקסימלי של $\dim(V)$ שווה 2 ו ערך מינימלי של $\dim(V)$ שווה 1.

---

2. נתון מרחב ווקטורי V מעל שדה R.

א) על ווקטורים x,y,z ידוע כי $2x+3y+4z=0$. הוכיחו כי $Span(x,y)=Span(y,z)$

ב) על ווקטורים a,b,c ידוע כי $\alpha a+\beta b+\gamma c=0$. האם בהכרח $Span(a,b)=Span(b,c)$?
אם כן נמקו אם לא תנו דוגמא נגדית.

ג) ידוע כי ווקטורים a,b,c,d מהווים בסיס של V. מצאו $Span(a,c)\cap Span(b,d)$. נמקו את התשובה.

פתרון.

א) $z=-1/4(2x+3y)\in Span(x,y)$ ו $x=-1/2(3y+4z)\in Span(y,z)$ לכן $Span(x,y)=Span(y,z)$

ב) דוגמא נגדית היא $a=b=0, c\neq 0$. $a+b+0c=0$ ו $Span(a,b)\neq Span(b,c)$

ג) אם $u=\alpha a+\gamma c=\beta b+\delta d\in Span(a,c)\cap Span(b,d)$ אז $\alpha a+\gamma c-\beta b-\delta d=0$. ווקטורים a,b,c,d הם בלתי תלוים לינארית לכן $\alpha=\beta=\lambda=\delta=0$. לכן $Span(a,c)\cap Span(b,d)=\{0\}$

---

3. במרחב ווקטורי V של מטריצות מסדר 2×2 מעל שדה R נתונים תתי מרחבים

$$U=\left\{\begin{pmatrix}2a+b & a-b\\ 3a & b\end{pmatrix}\right\} \text{ ו } W=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\middle| \begin{array}{l} d=c-a-b\\ c=2a-b-d\\ b=5a-3c-d\end{array}\right\}$$

א) מצאו בסיס ומימד של W

ב) מצאו בסיס ומימד של $U+W$

ג) מצאו בסיס ומימד של $U\cap W$

פתרון.

א) קואורדינטות של ווקטורים מ W מהווים מרחב פתרונות של מערכת משוואות

$$\begin{cases}-a-b+c-d=0\\ 2a-b-c-d=0\\ 5a-b-3c-d=0\end{cases}$$ נדרג מטריצת מקדמים

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -1 & -1\\ 5 & -1 & -3 & -1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & 1 & -3\\ 0 & -6 & 2 & -6\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ ונקבל

$$\begin{cases}-a-b+c-d=0\\ -3b+c-3d=0\end{cases}$$ עם משתנים חופשיים c,d. לכן ווקטורים $(2/3,\ \ 1/3,\ \ 1,\ \ 0)$ ו$(0,\ \ -1,\ \ 0,\ \ 1)$ מהווים בסיס ל מרחב פתרונות. ווקטור ראשון נכפיל ב 3 ונקבל בסיס $((2,\ \ 1,\ \ 3,\ \ 0),\ \ (0,\ \ -1,\ \ 0,\ \ 1))$. לכן בסיס של W הוא $\left(\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$

ו $\dim(W)=2$.

ב) $U=\left\{\begin{pmatrix}2a+b & a-b\\ 3a & b\end{pmatrix}\right\}=\left\{a\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}=Span\left(\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ לכן $\dim(U)=2$.

$U+W=Span\left(\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$. בודקים כי מטריצות האלה בלתי תלויות ולכן הן מהוות בסיס של $U+W$ ו $\dim(U+W)=3$

ג) $\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U+W)=2+2-3=1$. ווקטור $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ שייך ל $U\cap W$ ולכן הוא מהווה בסיס של $U\cap W$.