תאריך בחינה: 27.1.2004
שם המורה: דבורה פרץ, גרגורי משביצקי,
אפרים גורביץ
מבחן ב: מבוא לאלגברה ליניארית
מס' הקורס: 9041-1-201
מיועד לתלמידי: ביו-גרעינית/רפואית/ספיר
שנה: תשס"ד סמסטר:א' מועד: א
משך הבחינה : 2.5 שעות
חומר עזר : מחשבון כיס

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
מדור בחינות

ענה על ארבע מתוך ששת השאלות הבאות. השאלות שוות משקל. נמק כל חישוב בקצרה.

1. נתונות המטריצות $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

א. האם קיימת מטריצה X מסדר 3x3 כך ש - AX=B, אם כן מצא אותה, אם לא נמק מדוע.

ב. האם קיימת מטריצה Y מסדר 3x3 כך ש - YA=B, אם כן מצא אותה, אם לא נמק מדוע.

ג. $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$**, ידוע כי** $\det C = 2$**, חשב**

ג.1 $\det [5(C^T)^2C^{-1}]$,

ג.2 $\det\begin{pmatrix} a+2b & a+3b \\ c+2d & c+3d \end{pmatrix}$

2. נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} i & -2i & i \\ 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **מעל שדה C.**

א. האם A ניתנת לליכסון?

אם כן מצא טרנספורמצית לכסון P המקיימת $D=P^{-1}AP$, עבור D מטריצה אלכסונית, וחשב ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של A.

אם לא, נמק מדוע A לא ניתנת לליכסון.

ב. חשב A^{2004}.

ג. $f(A)=2A^2+3A+I$. האם f(A) ניתנת לליכסון?

אם כן מצא טרנספורמצית לכסון P_1 המקיימת $D_1=P_1^{-1}f(A)P_1$, עבור D_1 מטריצה אלכסונית, וחשב ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של f(A).

אם לא, נמק מדוע f(A) לא ניתנת לליכסון.

3. U ו-V מרחבים וקטורים מעל R. Dim U = 3 **ו-** dim V = n .

ידוע כי $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ **מהווה בסיס של** U**, ונתונה העתקה לינארית T,** $T:U\to V$

המקיימת $T(\bar{a})=T(\bar{b})=T(\bar{c})=\bar{v}\neq\bar{0}$**.**

מצאו בסיס ומימד של Im(T) **ושל** Ker (T)**. נמקו.**

4. נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **ונגדיר טרנספורמציה ליניארית** $T:M_{2x2}(R)\to M_{2x2}(R)$

כך ש- $T(X)=AX-XA$**.**

א. מצאו את המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס הסטנדרטי.

ב. מצאו בסיס ומימד של Ker(T) **ושל** Im(T)**.**

ג. מצאו $(T^2-2T)\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]$**.**

ד. מצאו (במידה וקיים) בסיס ומימד של Im(T)+Ker(T) **ושל** Im(T)∩ Ker(T)**.**

5. $P_3[x]=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\Re\}$ **, נגדיר העתקה T,** $T:P_3[x]\to P_3[x]$

כך שלכל $f\in P_3[x]$ **מתקיים:** $T(f)=x^2f''+xf'-f$**.**

א. הוכיחו ש-T העתקה ליניארית.

ב. מצא את ההצגה המטריציאלית של T ביחס לבסיס הסטנדרטי $1, t, t^2$

ג. מצאו בסיס ומימד של התמונה ושל הגרעין של T.

ד. מצאו פולינומים h ו-g כך ש $T(h)=x^2+x+1$ **ו-** $T^2(g)=x^2+x+1$**.**

6. **נתונה ההעתקה ליניארית** $T:R^3\to R^2$**,**

המקיימת : $T\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]=T\left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad T\left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$**.**

א. מצא בסיס ומימד של Ker(T) ושל Im(T).

ב. מצא את ההצגה המטריציאלית של T ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של R^3 **ו-** R^2**.**

ג. מצא את ההצגה המטריציאלית של T ביחס לבסיס

$B=\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\right\}$ **של**

R^3 **והבסיס** $B'=\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\right\}$**.**

ד. האם קיימת $T:R^3\to R^2$ **כך ש-** $T\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]=T\left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad T\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$**. נמקו?**

בהצלחה

פתרון של שאלה 1

ג. $|5(C^T)^2C^{-1}| = 5^2\dfrac{|C|^2}{|C|} = 25|C| = 50$

$$\begin{vmatrix} a+2b & a+3b \\ c+2d & c+3d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & a \\ 2d & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & 3b \\ 2d & 3d \end{vmatrix} = 0 + 3\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + 0 = 3\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$$

פתרון של שאלה 2 א. $|xI-A| = \begin{vmatrix} (x-i) & 2i & i \\ 0 & (x+i) & -i \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-i)(x+i)x$ לכן ערכים עצמיים הם

$\alpha=0,\beta=i,\gamma=-i$. A ניתנת לליכסון מפני שיש 3 ערכים עצמיים שונים זה מזה.

ווקטורים עצמיים ששייכים ל $\alpha=0$ הם פתרונות של מערכת משוואות ליניאריות עם מטריצת מקדמים

$\begin{pmatrix} -i & 2i & i \\ 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ נציב $u_3=1$ (משתנה חופשי) ונחשב $u_1=1,u_2=1$ ונקבל ווקטור עצמי $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ווקטורים עצמיים ששייכים ל $\beta=i$ הם פתרונות של מערכת משוואות ליניאריות עם מטריצת מקדמים

$\begin{pmatrix} 0 & 2i & -2i \\ 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 2i & i \\ 0 & 2i & -i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ נציב $u_1=1$ (משתנה חופשי) ונחשב $u_3=0,u_2=0$ ונקבל ווקטור עצמי $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ווקטורים עצמיים ששייכים ל $\gamma=-i$ הם פתרונות של מערכת משוואות ליניאריות עם מטריצת מקדמים

$\begin{pmatrix} -2i & 2i & i \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ נציב $u_2=1$ (משתנה חופשי) ונחשב $u_3=0,u_1=1$ ונקבל ווקטור עצמי $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

לכן $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$

ב. $D^{2004} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ לכן $A^{2004} = (PDP^{-1})^{2004} = PD^{2004}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ג. ווקטור עצמי של מטריצה A ששייך ל ערך עצמי a הוא גם ווקטור עצמי של מטריצה $f(A)$ ששייך ל ערך עצמי $f(a)$. לכן ערכים עצמיים של $f(A)$ הם $f(0)=1, f(i)=3i-1, f(-i)=-3i-1$ ואז

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3i-1 & 0 \\ 0 & 0 & -3i-1 \end{pmatrix}, P_1 = P$$

פתרון של שאלה 3 מפני ש $T(a-b)=T(a)-T(b)=0, T(a-c)=T(a)-T(c)=0$ מקבלים כי $(a-b),(a-c)\in Ker(T)$. **אם** $\alpha(a-b)+\beta(a-c)=0$ **אז** $(\alpha+\beta)a-\alpha b-\beta c=0$ **ואז** $\alpha=\beta=0$ **(כי ווקטורים** a,b,c **הם בלתי תלוים לינארית) ולכן גם** $(a-b),(a-c)$ **הם בלתי תלוים לינארית. לכן** $\dim(Ker(T))\ge 2$. **מפני ש** $v\neq 0$ **מקבלים כי** $\dim(\mathrm{Im}(T))\ge 1$. **מפני ש** $\dim(Ker(T))+\dim(\mathrm{Im}(T))=3$ **מקבלים כי** $\dim(Ker(T))=2$ **ו** $\{(a-b),(a-c)\}$ **הוא בסיס של** $Ker(T)$ **ו** $\dim(\mathrm{Im}(T))=1$ **ו** v **מהווה בסיס של** $\mathrm{Im}(T)$

פתרון של שאלה 4.א. $T\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=T\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

לכן $[T]_e=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

ב. מפני ש $T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}, T\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ הם בלתי תלוים לינארית הם מהווים בסיס של $\mathrm{Im}(T)$ ו $\dim(\mathrm{Im}(T))=2$. לכן $\dim(Ker(T))=4-2=2$. $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ הם בלתי תלוים לינארית ולכן הם מהווים בסיס של $Ker(T)$

ג. $\begin{pmatrix}0\\-b\\3c\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=[T^2-2T]_e\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\left[(T^2-2T)\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)\right]_e$ לכן

$$(T^2-2T)\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&-b\\3c&0\end{pmatrix}$$

ד. $\mathrm{Im}(T)+Ker(T)=Span\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ לכן $\dim(\mathrm{Im}(T)+Ker(T))=4$

לכן $\dim(\mathrm{Im}(T)\cap Ker(T))=0$ לכן ל $\mathrm{Im}(T)\cap Ker(T)$ אין בסיס.

פתרון של שאלה 5. א.

$$T(f+g)=x^2(f+g)''+x(f+g)'-(f+g)=x^2f''+xf'-f+x^2g''+xg'-g=T(f)+T(g)$$

$$T(\alpha f)=x^2(\alpha f)''+x(\alpha f)'-\alpha f=\alpha(x^2f''+xf'-f)=\alpha T(f)$$

ב. $T(1)=-1, T(x)=0, T(x^2)=3x^2$ ולכן $[T]_e=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

ג. מפני ש $T(1)=-1$ ו $T(x^2)=3x^2$ הם בלתי תלוים לינארית הם מהווים בסיס של $\operatorname{Im}(T)$ ו $\dim(\operatorname{Im}(T))=2$

לכן $\dim(Ker(T))=3-2=1$, $T(x)=0$ לכן x מהווה בסיס של $Ker(T)$.

ד. $\operatorname{Im}(T)=Span(3x^2,-1)=Span(x^2,1)=\{ax^2+c \mid a,c\in R\}$ לכן $x^2+x+1\notin \operatorname{Im}(T)$ ולכן

$x^2+x+1\notin \operatorname{Im}(T^2)$ ז"א פולינומים g,h לא קיימים

פתרון של שאלה 6 א. מפני ש $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\bar{0}$ $T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=T\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=$ מקבלים כי $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\in Ker(T)$

ו $\dim(Ker(T))\ge 1$. מפני ש $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ הם בלתי תלוים לינארית מקבלים כי $\dim(\operatorname{Im}(T))\ge 2$. מפני ש

$\dim(Ker(T))+\dim(\operatorname{Im}(T))=3$ מקבלים כי $\dim(Ker(T))=1$ ו $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ מהווה בסיס של $Ker(T)$

ו $\dim(\operatorname{Im}(T))=2$ ו $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ מהווים בסיס של $\operatorname{Im}(T)$.

ב. $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\bar{0}$, $T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ו $T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ לכן $[T]_e^e=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$

ג. $T(u_1)=v_1, T(u_2)=v_1, T(u_3)=v_2$ לכן $[T]_B^{B'}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}2=\left(2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)T=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)T$ לכן לא קיים אופרטור ליניארי שמקיים תנאים הנתונים.