1. נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ מעל השדה Q.

א. מצא את הפולינום האופייני $p_A(\lambda)$;

ב. לכסן את A, בלומר מצא מטריצה הפיכה P מעל Q כך ש-$P^{-1}AP$ אלכסונית;

ג. פתור את המשוואה $X^2=A+I$ (מצא לפחות פתרון אחד).

אחד הפתרונות

א) $p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda^2$

ב) הערכים העצמיים של A הם $\lambda_1=3$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$. נמצא וקטורים עצמיים השייכים ל-λ_1:

$$Ax=3x,\quad \begin{cases}x_1+x_2+x_3=3x_1\\x_1+x_2+x_3=3x_2,\\x_1+x_2+x_3=3x_3\end{cases}\quad \begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

x_3 חופשי לכן $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ מהווה בסיס של מרחב עצמי של A ששייך ל-3

ול-$\lambda_{2,3}$:

$$Ax=0\cdot x,\quad \begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}\quad \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

x_3,x_2 חופשי לכן $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ ו-$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ מהווים בסיס של מרחב עצמי של A ששייך ל-0

הווקטורים העצמיים האלה יוצרים בסיס עצמי שבו A מקבלת צורה אלכסונית.

מטריצת המעבר היא $P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ ומכאן $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac13&\frac13&\frac13\\-\frac13&\frac23&-\frac13\\-\frac13&-\frac13&\frac23\end{pmatrix}$,

והצורה האלכסונית היא $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

ג) $x^2=A+I$ לכן $P^{-1}X^2P=P^{-1}(A+I)P=P^{-1}AP+P^{-1}P=P^{-1}AP+I=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}X^2P=\left(P^{-1}XP\right)^2=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}XP_{1,2,\ldots,8}=\begin{pmatrix}\pm2&0&0\\0&\pm1&0\\0&0&\pm1\end{pmatrix}$$

יש שמונה אפשרויות ל-X נחשב לדוגמה פתרון אחד

$$X=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac13&\frac13&\frac13\\-\frac13&\frac23&-\frac13\\-\frac13&-\frac13&\frac23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac43&\frac13&\frac13\\\frac13&\frac43&\frac13\\\frac13&\frac13&\frac43\end{pmatrix}$$

2. נניח כי W הוא תת-המרחב $W = Sp(e_1, e_2) \subset Q^3$ ו- e_1, e_2, e_3 בלתי תלויים לינארית.

א. האם יש טרנספורמציה לינארית $T: Q^3 \to Q^2$ כך ש- $\ker T = W$ ו- $T(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$?

אם כן תן דוגמה, אם לא נמק;

ב. האם יש טרנספורמציה לינארית $S: Q^3 \to Q^2$ כך ש- $\ker S = W$ ו- $\operatorname{Im} S = Q^2$? אם כן תן דוגמה, אם לא נמק;

ג. האם יש אופרטור לינארי $R: Q^3 \to Q^3$ כך ש- $R^2 \neq 0$ אבל $R^3 = 0$? אם כן תן דוגמה, אם לא נמק.

אחד מהפתרונות

א. כן. לפי הנתונים המטריצה של T היא $A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

ב. לא, כי במקרה הזה $\dim \ker S + \dim \operatorname{Im} S = 4$, ואילו הסכום חייב להיות שווה ל- $\dim Q^3 = 3$.

ג. כן. מתאים אופרטור בעל מטריצה $A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, כי $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = 0$.

3. נסמן דרך V מרחב כל פולינומים $f(t)$ ממעלה לא יותר מ- 2 מעל שדה R. נגדיר פונקציה $T: V \to V$ ע"י הנוסחה $T(f) = (t+2) \cdot \dfrac{df}{dt}$.

א. הוכח כי T אופרטור לינארי;

ב. חשב את המטריצה של T ביחס לבסיס $v = \{1, t, t^2\}$;

ג. מצא את הפולינום האופייני $p(\lambda)$ ואת הערכים העצמיים של T;

ד. האם T ניתן ללכסון? נמק.

אחד מהפתרונות

א. $T(f+g) = (t+2)(f'+g') = (t+2)f' + (t+2)g' = T(f) + T(g)$
$T(\alpha f) = (t+2)(\alpha f') = \alpha \cdot (t+2) f' = \alpha T(f)$, וזה מסמן לינאריות.

ב. העמודות של A_T הן תמונות של וקטורי הבסיס:

$$T(1) = (t+2) \cdot 0 = 0, \quad T(t) = (t+2) \cdot 1 = 2 + t, \quad T(t^2) = (t+2) \cdot 2t = 4t + 2t^2$$

מכאן $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ג. $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ ומכאן $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

ד. בוודאי שכן: הארכים העצמיים שונים. הצורה האלכסונית היא $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \in M^{2\times 2}(C)$.

א. מצא את הפולינום האופייני $p_A(\lambda)$ ואת הערכים העצמיים של A;

ב. האם A ניתנת ללכסון? אם כן לבסן את A, אם לא נמק;

ג. תהיה B מטריצה המקיימת $B^2 + I = A$ ו- μ ערך עצמי של B. הוכח כי $\mu^2 + 1$ הוא ערך עצמי של A.

אחד מהפתרונות

א. $p(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 1\\ -6 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$.

ב. הערכים העצמיים שונים, לכן A ניתנת ללכסון והצורה האלכסונית היא $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$. כדי למצוא את מטריצת המעבר P , נחשב בסיס עצמי:

$$\lambda_1=1:\ \begin{cases}-3x_1+x_2=0\\-6x_1+2x_2=0\end{cases}\quad v(1)=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix};\quad \lambda_2=2:\ \begin{cases}-2x_1+x_2=0\\-6x_1+3x_2=0\end{cases}\quad v(2)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

לכן $P=\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$.

ג. אם v וקטור עצמי של B השייך ל- μ , אז $Bv=\mu v$, $B^2v=B(Bv)=\mu\cdot Bv=\mu^2 v$, $(B^2+I)v=(\mu^2+1)v$, וזה מה שצריך להוכיח כי $B^2+I=A$.

5. יהיה $A=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&a_1\\0&\cdots&a_2&0\\ \vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\ a_n&\cdots&0&0\end{pmatrix}$ מטריצה ריבועית מסדר n מעל שדה כלשהו.

א. חשב את $\det A$;

ב. עבור אלו סקלרים a_k המטריצה תהיה הפיכה?

ג. חשב את A^{-1} בהנחה שזה אפשרי.

אחד מהפתרונות

א. נסמן $\det A=D_n$. הפיתוח לפי שורה אחרונה תתן נוסחת נסיגה $D_n=(-1)^{n+1}a_nD_{n-1}$.
מכאן $D_{n-1}=(-1)^n a_{n-1}D_{n-2}$, $D_{n-2}=(-1)^{n-1}a_{n-2}D_{n-3}$ וכן הלאה; בהצבה של כל זה לנוסחה הראשונה מקבלים:

$$D_n=(-1)^{n+1}a_n\cdot(-1)^n a_{n-1}\cdot(-1)^{n-1}a_{n-2}\cdot\cdots\cdot(-1)^4a_3\cdot(-1)^3a_2\cdot(-1)^2a_1=$$
$$=(-1)^{2+3+4+\ldots+(n+1)}a_1a_2a_3\cdots a_n=(-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}a_1a_2a_3\cdots a_n .$$

ב. ברור כי A הפיכה אם ורק אם בין המספרים a_k אין אפסים.

ג. לפי אלגוריתם סטנדרטי נרכיב מטריצה $\langle A|I\rangle$ ונביא אותה ע״י פעולות יסודיות לצורה $\langle I|B\rangle$; המטריצה B תהיה הפוכה ל- A :

$$\left\langle\begin{array}{cccc|ccccc}0&\cdots&0&a_1&1&0&\cdots&0&0\\0&\cdots&a_2&0&0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_n&\cdots&0&0&0&0&\cdots&0&1\end{array}\right\rangle\sim\left\langle\begin{array}{cccc|cccc}a_n&\cdots&0&0&0&\cdots&0&1\\0&a_{n-1}&\cdots&0&0&\cdots&1&0\\ \vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&a_1&1&\cdots&0&0\end{array}\right\rangle\sim$$

$$\sim\left\langle\begin{array}{cccc|cccc}1&\cdots&0&0&0&\cdots&0&\frac{1}{a_n}\\0&1&\cdots&0&0&\cdots&\frac{1}{a_{n-1}}&0\\ \vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&1&\frac{1}{a_1}&\cdots&0&0\end{array}\right\rangle$$

לכן $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&\frac{1}{a_n}\\0&\cdots&\frac{1}{a_{n-1}}&0\\ \vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\ \frac{1}{a_1}&\cdots&0&0\end{pmatrix}$.

6. ב- R^3 נתונים שלושה הוקטורים $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ והאופרטור הלינארי $T:R^3\to R^3$

המקיים $Tv_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $Tv_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $Tv_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

א. חשב את המטריצה A המייצגת את T ביחס לבסיס הסטנדרטי $e=\{e_1,e_2,e_3\}$;

ב. חשב את A^{-1};

ג. מצא וקטור u כך ש- $Tu=e_1$;

ד. מצא וקטור w כך ש- $T^2w=e_1$.

אחד הפתרונות

א. $T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\-0.5\\0.5\end{pmatrix}$

לכן ביחס לבסיס הסטנדרטי המטריצה של T היא $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&-0.5\\0&1&0.5\end{pmatrix}$

ב.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\2&0&-0.5&0&1&0\\0&1&0.5&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&0&-0.5&-2&1&0\\0&1&0.5&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0.5&0&0&1\\0&0&1&4&-2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-2&1&1\\0&0&1&4&-2&0\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&1\\4&-2&0\end{pmatrix}$$

ג. אם $Au=e_1$ אז $u=A^{-1}e_1$. מכאן u הוא עמודה ראשונה של A^{-1}: $u=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$.

ד. אם $A^2w=e_1$ אז $w=A^{-2}e_1=A^{-1}(A^{-1}e_1)=A^{-1}u$. לכן $w=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&1\\4&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\8\end{pmatrix}$