# SUITES SPECTRALES, HYPERCOHOMOLOGIE, ET CATÉGORIE DÉRIVÉE

DAVID CORWIN

Abstract. Dans cet article on montre comment on peut voir la suite spectrale de Grothendieck comme cas particulier de la suite spectrale pour l'hyperhomologie, qui est elle-même cas particulier de la suite spectrale pour un complexe filtré. Puis on parle un peu de l'interprétation en termes de la catégorie dérivée *(à ajouter)*.

## 0. Conventions

Il y a toujours des conventions *homologiques* et des conventions *cohomologiques* pour les indices. Dans chaque cas, nous utilisons les premières (bien que les autres soient plus utilisées). Cependant, tout ce qu'on va faire procède de la même façon pour les conventions cohomologiques. En plus, tout ce qu'on fait pour les foncteurs dérivés à gauche peut être faite pour les foncteurs dérivés à droite, en remplaçant gauche par droite, droite par gauche, et projectif par injectif. Le lecteur sceptique qui voudrait pas tout refaire pourrait noter qu'on peut parler de $\mathcal{A}^{op}$, la catégorie duale de la catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

Un *complexe de chaines* (autrement dit *complexe différentiel*) d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est une suite d'objets et morphismes

$$\cdots \overset{d_{-1}}{\leftarrow} C_{-1} \overset{d_0}{\leftarrow} C_0 \overset{d_1}{\leftarrow} C_1 \overset{d_1}{\leftarrow} C_2 \leftarrow \cdots$$

de $\mathcal{A}$ tel que $d_{p-1} \circ d_p = 0$ pour tout $p$. Un *complexe de cochaines* signifie la même chose mais avec les morphismes dans l'autre sens (ou, de façon équivalente, avec les degrés multiplies par $-1$).

On remarque aussi que presque toutes les constructions qu'on fait sont naturelles, même si on ne le montre pas explicitement ici.

Si on note un complexe fini

$$\mathcal{C} = A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n$$

(même avec $n = 1$ ou $n = 2$), on suppose qu'on ajoute des zéros au deux cotes, i.e. c'est vraiment

$$\cdots \to 0 \to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n \to 0 \to \cdots$$

On note parfois un tel complexe par $A_\bullet$.

Pour une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, on note $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ et $\mathrm{Ch}^+(\mathcal{A})$ les catégories de complexes de chaines habituels et nuls en degrés non-positifs, respectivement.

On dit $A \cong B$ pour noter que $A$ et $B$ sont isomorphes.

## 1. Suites Spectrales

Fixons une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Pour des raisons pédagogiques, on va decrire certaines constructions importantes dans l'algèbre homologique, telles que les suites spectrales et l'hyperhomologie.

**Définition 1.1.** Une *suite spectrale (homologique)* consiste en la donnée, pour tout $r \geq 0$ et $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$:

(1) un objet $E^r_{pq}$ de $A$

(2) un morphisme $d^r_{pq} : E^r_{pq} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ tel que $d^r_{p-r,q+r-1} \circ d^r_{pq} = 0$

(3) un isomorphisme $i^r_{pq} : H^r_{pq} \to E^{r+1}_{pq}$ où $H^r_{pq} = (\ker(d^r_{pq}))/(\mathrm{im}(d^r_{p+r,q-r+1}))$

On appelle tous les $E^r_{pq}$ et $d^r_{pq}$ pour un $r$ fixe la *r-ième page* de la suite spectrale.

En particulier, chaque $E^r_{pq}$ s'identifie à un sous-quotient de $E^0_{pq}$. Soit $Z^r_{pq}$ et $B^r_{pq}$ le sous-groupe et noyau correspondent. On a alors

$$0 = B^0_{pq} \subseteq \cdots \subseteq B^r_{pq} \subseteq \cdots \subseteq Z^r_{pq} \subseteq \cdots \subseteq Z^0_{pq} = E^0_{pq}.$$

1.1. **Complexes filtrés.** Soit $\mathcal{C}$ un complexe de chaines

$$0 \to C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \cdots$$

d'objets de $\mathcal{A}$ tel qu'il existe une filtration

$$0 = F_0\mathcal{C} \subseteq \cdots \subseteq F_{p-1}\mathcal{C} \subseteq F_p\mathcal{C} \subseteq F_{p+1}\mathcal{C} \subseteq \cdots \subseteq F_n\mathcal{C} = \mathcal{C}.$$

De façon équivalente, on peut donner à chaque objet du complexe une filtration tel que les morphismes du complexe respectent la filtration. On note par $\mathrm{Gr}_p\mathcal{C}$ le complexe quotient $F_p\mathcal{C}/F_{p-1}\mathcal{C}$.

Cette filtration donne naturellement une filtration sur l'homologie du complexe (ceci se déduit facilement du fait que l'homologie est un foncteur sur la catégorie des complexes). On note cela $\mathrm{Gr}_pH_n(\mathcal{C})$.

On peut définir une suite spectrale de la façon suivante. Introduisons $q = n - p$. Puis, on note $E^0_{pq} = F_pC_n/F_{p-1}C_n$. Le morphisme $d^0_{pq}$ est tout simplement le différentiel du complexe $C$ sur la partie graduée : $d_n : F_pC_n/F_{p-1}C_n \to F_pC_{n+1}/F_{p-1}C_{n-1} = E^0_{p,q+1}$.

Le fait que, pour $r = 1$, on a

$$E^{r+1}_{pq} \cong (\ker(d^r_{pq}))/(\mathrm{im}(d^r_{p+r,q-r+1}))$$

veut dire que $E^1_{pq} \cong H_n(\mathrm{Gr}_p\mathcal{C})$.

Quelle est la différence entre $H_n(\mathrm{Gr}_p\mathcal{C})$ et $\mathrm{Gr}_pH_n(\mathcal{C})$? Le premier est égal à l'ensemble des éléments de $F_pC_n$ qui tombent dans $F_{p-1}C_{n-1}$ (ce qu'on note $Z^1_{pq}$), modulo $F_{p-1}C_n$ et l'image de $F_pC_{n+1}$ sous le différentiel $d_{n+1}$. Le deuxième est égal à l'ensemble des éléments de $F_pC_n$ qui s'envoient à zéro, modulo l'image de $C_{n+1}$ et les éléments de $F_{p-1}C_n$ qui s'envoient à zéro sous le différentiel. C'est donc un sous-quotient du précédent.

Maintenant, il faut définir un morphisme $d^1_{pq} : E^1_{pq} = H_n(\mathrm{Gr}_p\mathcal{C}) \to H_{n-1}(\mathrm{Gr}_{p-1}\mathcal{C})$. Le différentiel $d_n$ envoie $Z^1_{pq}$ à $H_{n-1}(\mathrm{Gr}_{p-1}\mathcal{C})$. Comme on a dit toute à l'heure, $H_n(\mathrm{Gr}_p\mathcal{C})$ est un quotient du premier par $F_{p-1}C_n$ et l'image de $F_pC_{n+1}$ sous le différentiel. Mais ces deux-là s'envoient à 0 dans $H_{n-1}(\mathrm{Gr}_{p-1}\mathcal{C})$, d'où un morphisme $E^1_{pq} = H_n(\mathrm{Gr}_p\mathcal{C}) \to H_{n-1}(\mathrm{Gr}_{p-1}\mathcal{C})$.

C'est un exercice facile de verifier que les $d^1_{pq}$ fournissent des complexes (i.e. que leurs compositions sont nuls). Maintenant, calculons $E^2_{pq}$. Le noyau de $d^1_{pq}$, retiré à $Z^1_{pq}$, est l'ensemble des éléments qui tombent, sous l'image de $d_n$, dans le compositum de $F_{p-2}C_{n-1}$ et l'image de $F_{p-1}C_n$ sous $d_n$. L'image de $d^1_{p+1,q}$ est égal aux éléments de $F_{p+1}C_{n+1}$ qui tombent dans $F_pC_n$ sous $d_{n+1}$. Mais le noyau de $d^1_{pq}$. Noter que, modulo $F_{p-1}C_n$, l'ensemble des éléments qui tombent, sous l'image de $d_n$, dans le compositum de $F_{p-2}C_{n-1}$ et l'image de $F_{p-1}C_n$ sous $d_n$, est égal à l'ensemble des éléments qui tombent dans $F_{p-2}C_{n-1}$. Autrement dit, on a montré que $E^2_{pq}$ est (isomorphe à) l'ensemble des éléments de $F_pC_n$ qui tombent dans $F_{p-2}C_{n-1}$, modulo son intersection avec $d_n(F_{p+1}C_{n+1})$ et $F_{p-1}C_n$.

En général, on peut définir $E^r_{pq}$ comme l'ensemble des éléments de $F_pC_n$ qui s'envoient dans $F_{p-r}C_{n-1}$ sous $d_n$, modulo son intersection avec $d_n(F_{p+r-1}C_{n+1})$ et $F_{p-1}C_n$. On utilise $d_n$ pour définir $d^r_{pq}$, et tout se déduit d'une verification assez simple mais penible.

Comme on a supposé que la filtration soit finie, les $E^r_{pq}$ sont isomorphes à $\mathrm{Gr}_pH_n(\mathcal{C})$ pour $r$ suffisament grand. On dit que la suite spectrale *converge* à $H_n(\mathcal{C})$.

### 1.2. Bicomplexe.

**Définition 1.2.** Un bicomplexe $C$ est la donnée d'un groupe $C_{pq}$ pour tout $p, q \in \mathbb{Z}^2$ et des morphismes $d^h, d^v$ tel que $d^h_{pq} : C_{pq} \to C_{p-1,q}$ et $d^v_{pq} : C_{pq} \to C_{p,q-1}$ et $(d^v)^2 = (d^h)^2 = (d^v + d^h)^2$. On suppose toujours qu'il existe $p_0, q_0$ tel que $C_{pq}$ est nul si $p < p_0$ ou $q < q_0$.

On définit un complexe $\mathrm{Tot}(C)$, le *complexe total*, avec $\mathrm{Tot}(C)_n = \oplus_{p+q=n} C_{pq}$ et différentiel $d^h + d^v$.

En utilisant le bicomplexe, il y a deux filtrations qu'on peut mettre sur $\mathrm{Tot}(C)$. Les deux sont

$$'F_p \mathrm{Tot}(C)_n = \bigoplus_{r \geq p} C_{r,n-r}$$

et

$$''F_p \mathrm{Tot}(C)_n = \oplus_{s \geq p} C_{n-s,s}.$$

Noter que $'F_p \mathrm{Tot}(C)_n \cap'' F_q \mathrm{Tot}(C)_n = C_{pq}$. Cela nous donne deux suites spectrales $'E^r_{pq}$ et $''E^r_{pq}$ qui convergent à $H_n(\mathrm{Tot}(C))$.

On note que $\mathrm{Gr}'_p F \mathrm{Tot}(C)_n = C_{pq}$ et $\mathrm{Gr}''_p F \mathrm{Tot} C_n = C_{qp}$, et $'d^0_{pq} = d^v$ et $''d^0_{pq} = d^h$. Donc, la première page est donnée par $'E^1_{pq} = H^v_q(C_{p\bullet})$ et $''E^1_{pq} = H^h_p(C_{\bullet q})$, où $H^v$ et $H^h$ dénotent l'homologie prise avec $d^v$ et $d^h$, respectivement. Puis, pour la première page, on remplace les deux, i.e. $'d^1_{pq} : H^v_q(C_{p*}) \to H^v_q(C_{p-1,\bullet})$ est le morphisme induit par $d^h$, et $''d^1_{pq} : H^h_p(C_{\bullet q}) \to H^h_p(C_{*,q-1})$. Alors, on a finalement que

$$'E^2_{pq} = H^h_p(H^v_q(C_{\bullet\bullet}))$$

et

$$''E^2_{pq} = H^v_q(H^h_p(C_{\bullet\bullet})).$$

**Corollaire 1.3.** *Si les colonnes où les lignes de $C$ sont exactes, alors* $\mathrm{Tot}(C)$ *est exacte.*

*Proof.* Cela voudrait dire que la première page de la suite spectral (i.e. pour $r = 1$) est nul, et comme la suite spectral converge, l'homologie de $\mathrm{Tot}(C)$ est nul, i.e. $\mathrm{Tot}(C)$ est exacte. ☐

## 2. Hyperhomologie

Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux catégories abéliennes tel que $\mathcal{A}$ a suffisamment de projectifs.

Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un foncteur additif exacte à droite, on a les foncteurs dérivés $L^i F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

**Définition/Théorème 2.1.** *Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif exacte à droite. Il existe une unique suite $\mathbb{L}^i F : \mathrm{Ch}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ de foncteurs avec les propriétés suivantes:*

1. *Si $\mathcal{C}$ est un complexe d'objets projectifs, alors $\mathbb{L}^i F(\mathcal{C}) = H_i(F(\mathcal{C}))$ ($\mathbb{R}^i F(\mathcal{C}) = H_i(F(\mathcal{C}))$). (En fait, on peut montrer que c'est vrai même si les objets sont acycliques pour $F$.)*
2. *Si $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un morphisme de complexes qui est un quasi-isomorphisme, alors $f^* : \mathbb{L}^i F(\mathcal{C}) \to \mathbb{L}^i F(\mathcal{D})$ est un isomorphisme. (Autrement dit, les foncteurs $\mathbb{L}^i F$ se factorisent par la catégorie dérivée.)*
3. *Si $\mathrm{CZ}(A) := A$ ("complexe zéro") (c.f. les conventions) est le complexe avec $A$ en degré $0$, alors $\mathbb{L}^i F(\mathcal{C}) = L^i F(a)$.*
4. *Si $0 \to \mathcal{C}' \to \mathcal{C} \to \mathcal{C}'' \to 0$ est une suite exacte de complexes, alors il existe une suite exacte longue*
$$\cdots \to \mathbb{L}^i(\mathcal{C}') \to \mathbb{L}^i(\mathcal{C}) \to \mathbb{L}^i(\mathcal{C}'') \to \cdots.$$

*On les appelle les* foncteurs hyperdérivés*.*

On note qu'on peut prendre les deux premières proprietes comme définition. Les autres se déduisent de cette proprietes, car tout complexe est quasi-isomorphe à un complexe de projectifs.

**Lemme 2.2.** *Si $\mathcal{C}$ est le complexe $A \hookrightarrow B$ avec $B$ en degré $0$, alors $\mathbb{L}^i F(\mathcal{C}) \cong L^i F(B/A)$.*

*Proof.* Ceci résulte du fait que le complexe $\mathcal{C}$ est quasi-isomorphe au complexe $\mathrm{CZ}(B/A)$. □

On général, on a le suivant :

**Corollaire 2.3.** *Si $\mathcal{C} = \cdots \to A_2 \to A_1 \to A \hookrightarrow B$ est exacte en degré strictement positif, alors $\mathbb{L}^i F(\mathcal{C}) \cong L^i F(B/A)$.*

*Proof.* La démonstration se déduit de la même façon. □

2.1. **Les suites spectrales.** On note qu'on peut calculer le foncteur hyperdérivé d'une autre manière. On peut donner à chaque objet du complexe $\mathcal{C}$ une resolution projective tel que des morphismes entre les resolutions en fournissent un bicomplexe. On peut ensuite prendre l'homologie du complexe total du bicomplexe, et c'est égal aux foncteurs hyperdérivés. En prenant les suites spectrales pour les deux filtrations du bicomplexe, on a la *suite spectrale d'hyperhomologie* :

**Proposition 2.4.** *Soit $\mathcal{C} = \cdots \to A_{n+1} \to A_n \to A_{n-1} \to \cdots$ un complexe d'objets de $\mathcal{A}$ et $F : \mathbb{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur exact à droite. Il existe deux suites spectrales $'E^r_{pq}$ et $''E^r_{pq}$ qui convergent à $\mathbb{L}^n F(\mathcal{C})$ tel que*

$$'E^2_{pq} = H_p(L_q F(\mathcal{C}))$$

*et*

$$''E^2_{pq} = L_p F(H_q(\mathcal{C}))$$

2.2. **Suite Spectrale de Grothendieck.** Suppons $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs exactes à droite. On voudrait calculer les foncteurs dérivés $L^i(G \circ F)$ en termes des foncteurs $L^i F$ et $L^j G$. On pourrait donner comme première approximation, $L^n(FG) = \oplus_{i+j=n} L^j G \circ L^i F$. Comme on va voir, ceci peut être vue comme une suite spectrale de la façon suivante.

On suppose d'abord que $F$ envoie des objets projectifs de $\mathcal{A}$ à des objets de $\mathcal{B}$ qui sont acycliques pour $\mathcal{B}$. Soit $M$ un objet de $\mathcal{A}$.

Maintenant, on prend une resolution projective

$$\cdots P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

de $M$. On regarde cette resolution comme complexe $P_\bullet$ quasi-isomorphe à $\mathrm{CZ}(M)$. Le complexe $F(P_\bullet)$ est un complexe d'objets acycliques pour $G$. D'apres les proprietes des foncteurs hyperdérivés, cela veut dire que $\mathbb{L}^i G(F(P_\bullet))$ est isomorphe à $H_i(G(F(P_\bullet))$. Mais le dernier est isomorphe à $L^i(G \circ F)(M)$. Puis, on peut appliquer la suite spectrale de foncteurs hyperdérivés pour avoir une suite spectrale qui donne $L^i(G \circ F)(M)$. On utilise la deuxième (") suite spectrale, ce qui satisfait à

$$E^2_{pq} = L^p G(H_q(P_\bullet)).$$

Mais $H_q(P_\bullet) = L^q F(M)$, alors

$$E^2_{pq} = L^p G(L^q F(M))).$$

Ceci est la *suite spectrale de Grothendieck.*

## 3. Catégorie Dérivée

### 3.1. Suites exactes longues (les triangles distingués).

### 3.2. Suites spectrales en termes de catégories dérivées.