תרגול 9. פתרונות

1. (א). $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$. $F_X(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-e^{-t}, & 0\le t\end{cases}$, $P\{X\in[0,\infty)\}=1$. $Y=g(X)=e^{2X/3}$,

$g:[0,\infty)\to[1,\infty]$ $\Leftarrow$ $P\{Y\in[1,\infty)\}=1$ $\Leftarrow$ לכל $t<1$ $F_Y(t)=0$. אם $1\le t$,

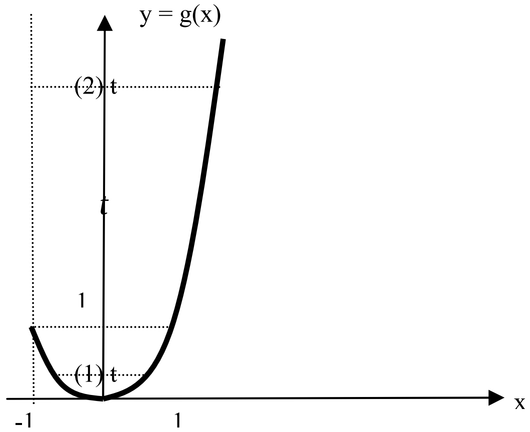
$F_Y(t)=P\{e^{2X/3}\le t\}=P\{X\le 3\ln t/2\}=F_X(3\ln t/2)$. הפונקציה $F_Y(t)$ רציפה לכל t ו- $F_Y'(t)$ קיימת ורציפה לכל $t\ne 1$. מכאן $f_Y(t)=F_Y'(t)$ לכל $t\ne 1$. לכל $t>1$

$f_Y(t)=F_Y'(t)=[F_X(3\ln t/2)]'=f_X(3\ln t/2)\cdot(3/2t)=e^{-3\ln t/2}\cdot(3/2t)=3t^{-5/2}/2$, ולכל $t\le 1$ $f_Y(t)=0$.

(ב) $E(Y)=\int_1^\infty y\cdot\frac{3}{2}y^{-5/2}dy=-3y^{-1/2}\Big|_1^\infty=3$. $E(Y^2)=\int_1^\infty y^2\cdot\frac{3}{2}y^{-5/2}dy=3y^{1/2}\Big|_1^\infty=\infty$ $\Rightarrow$ $V(Y)=\infty$.

2. $f_X(x)=\begin{cases}a(1+|x-2|), & -1\le x\le 4\\ 0, & else\end{cases}=\begin{cases}a(3-x), & -1\le x\le 2\\ a(x-1), & 2<x\le 4\\ 0, & else\end{cases}$.

(א) $1=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)dx=\int_{-1}^{2}a(3-x)dx+\int_{2}^{4}a(x-1)dx=a\cdot\frac{23}{2}$ $\Rightarrow$ $a=\frac{2}{23}$.



(ב) $P\{X\in[-1,4]\}=1$, $Y=g(X)=X^2$, $g:[-1,4]\to[0,16]$. $\Leftarrow$ לכל $t<-1$ $F_Y(t)=0$, ולכל $4\le t$ $F_Y(t)=1$. במקרה (1): $0\le t<1$

$F_Y(t)=P\{X^2\le t\}=P\{\sqrt{t}\le X\le\sqrt{t}\}=F_X(\sqrt{t})-F_X(-\sqrt{t})$,

$F_Y'(t)=f_X(\sqrt{t})\cdot(1/2\sqrt{t})+f_X(-\sqrt{t})\cdot(1/2\sqrt{t})=(1/2\sqrt{t})[a(3-\sqrt{t})+a(3+\sqrt{t})]=3a/\sqrt{t}=6/23\sqrt{t}$.

במקרה (2):

$1\le t<16$ $F_Y(t)=P\{X^2\le t\}=P\{-1\le X\le\sqrt{t}\}=F_X(\sqrt{t})-F_X(-1)=F_X(\sqrt{t})$,

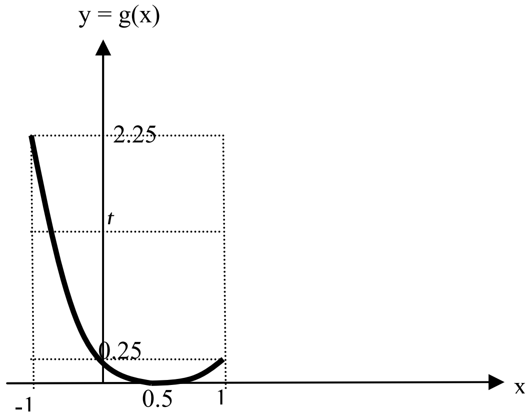
$$F_Y'(t)=f_X(\sqrt{t})\cdot(1/2\sqrt{t})=\frac{1}{2\sqrt{t}}\begin{cases}a(3-\sqrt{t}), & 1<\sqrt{t}\le 2\\ a(\sqrt{t}-1), & 2\le\sqrt{t}<4\end{cases}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\begin{cases}a(3-\sqrt{t}), & 1<t\le 4\\ a(\sqrt{t}-1), & 4<t<16\end{cases}=\begin{cases}(3-\sqrt{t})/23\sqrt{t}, & 1<t\le 4\\ (\sqrt{t}-1)/23\sqrt{t}, & 4<t<16\end{cases}$$

הפונקציה $F_Y(t)$ רציפה לכל t ו- $F_Y'(t)$ קיימת ורציפה לכל $t\neq 0,1,16$. מכאן $f_Y(t)=F_Y'(t)$ לכל $t\neq 0,1,16$.

$$f_Y(t)=\begin{cases}\frac{6}{23\sqrt{t}}, & 0<t<1\\ \frac{3}{23\sqrt{t}}-\frac{1}{23}, & 1<t\le 4\\ \frac{1}{23}-\frac{1}{23\sqrt{t}}, & 4<t<16\\ 0, & else\end{cases}.$$

ג) $E(Y)=\int_0^1 y\cdot\frac{6}{23\sqrt{y}}dy+\int_1^4 y\cdot\frac{1}{23}\left(\frac{3}{\sqrt{y}}-1\right)dy+\int_4^{16} y\cdot\frac{1}{23}\left(1-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)dy=\frac{559}{138}$.

3. $f_X(x)=\begin{cases}1/2, & -1\le x\le 1\\ 0, & else\end{cases}$, $P\{X\in[-1,1]\}=1$ **,** $Y=g(X)=(X-0.5)^2$, $g:[-1,1]\to[0,2.25]$ $\Leftarrow$



לכל $t<-1$ $F_Y(t)=0$, ולכל $2.25\le t$ $F_Y(t)=1$.

במקרה (1): $0\le t<0.25$

$F_Y(t)=P\{(X-0.5)^2\le t\}=P\{-\sqrt{t}+0.5\le X\le\sqrt{t}+0.5\}=F_X(\sqrt{t}+0.5)-F_X(-\sqrt{t}+0.5)$,

$F_Y'(t)=f_X(\sqrt{t}+0.5)\cdot 1/2\sqrt{t}+f_X(-\sqrt{t}+0.5)\cdot 1/2\sqrt{t}=(1/2\sqrt{t})\cdot[1/2+1/2]=(1/2\sqrt{t})$

במקרה (2): $0.25\le t<2.25$

$F_Y(t)=P\{(X-0.5)^2\le t\}=P\{-\sqrt{t}+0.5\le X\le 1\}=1-F_X(-\sqrt{t}+0.5)$,/

$F_Y'(t)=f_X(-\sqrt{t}+0.5)\cdot 1/2\sqrt{t}=1/2\cdot(1/2\sqrt{t})=1/4\sqrt{t}$

הפונקציה $F_Y(t)$ רציפה לכל t ו- $F_Y'(t)$ קיימת ורציפה לכל $t\neq 0,0.25,2.25$. מכאן $f_Y(t)=F_Y'(t)$ לכל

$t\neq 0,0.25,2.25$ $\Leftarrow$ $f_Y(t)=\begin{cases}1/2\sqrt{t}, & 0<t\le 0.25\\ 1/4\sqrt{t}, & 0.25<t\le 2.25\\ 0, & else\end{cases}$.

$E(Y)=\int_0^{1/4} y\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}dy+\int_{1/4}^{9/4} y\cdot\frac{1}{4\sqrt{y}}dy=\frac{7}{12}$.

4. מרחב ההסתברות (Ω,P): מרחב המדגם Ω הוא כל $2^3=8$ התוצאות האפשריות ω של הטלת המטבע שלוש פעמים, מרחב ההסתברות סימטרי: לכל ω $P(\omega)=\frac{1}{|\Omega|}=\frac{1}{8}$. נמצא פונקצית ההסתברות המשותפת

$p_{X,Y}(i,j)=P\{X=i,Y=j\}$, כאשר $i=0,1,2;\ j=0,1,2.3$ הם הערכים האפשריים של Y ו- X .

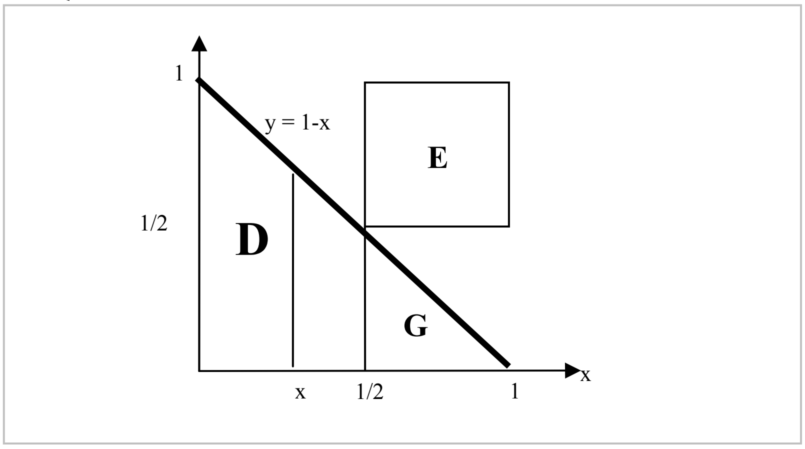
$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=2,Y=2\}=P\{X=2,Y=3\}=\frac{1}{|\Omega|}=\frac{1}{8}$,

$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=2,Y=3\}=\frac{2}{|\Omega|}=\frac{1}{4}$ והסתברויות אחרות שוות לאפס. נקבל

$j \backslash i$	0	1	2	$p_Y(j)$
0	1/8	0	0	1/8
1	1/8	¼	0	3/8
2	0	¼	1/8	3/8
3	0	0	1/8	1/8
$p_X(i)$	1/4	½	1/4	1

. ($X\sim B(2,1/2), Y\sim B(3,1/2)$) , X ו- Y תלויים)

5. יהי $D=\{(x,y): 0<x,y<1,\ \ 0<x+y<1\}$ **.** $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}c, & (x,y)\in D\\ 0, & else\end{cases}$



(א) $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy=\iint_D f_{X,Y}(x,y)dxdy=\iint_D cdxdy=cS(D) \Rightarrow c=\frac{1}{S(D)}=\frac{1}{1/2}=2$

(ב) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{1-x}2dy, & 0\le x\le 1\\ 0, & else\end{cases}=\begin{cases}2(1-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & else\end{cases}$. $f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y), & 0\le y\le 1\\ 0, & else\end{cases}$,

כי x ו- y משתתפים בצפיפות $f_{X,Y}(x,y)$ באופן סימטרי. (ג) $E(X)=\int_0^1 x\cdot 2(1-x)dx=\frac{1}{3}$,

$E(X^2)=\int_0^1 x^2\cdot 2(1-x)dx=\frac{1}{6}$, $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{18}$.

(ד) אם מ"מ X,Y בלתי-תלויים, אז $P\{X\in A, Y\in B\}=P\{X\in A\}\cdot P\{Y\in B\}$ לכל קבוצות A ו- B על הישר.
ניקח $A=[0.5,1]$, $B=[0.5,1]$ ונראה כי $P\{X\in A, Y\in B\}\neq P\{X\in A\}\cdot P\{Y\in B\}$.
לכל תחום מישורי E $P\{(X,Y)\in E\}=\iint_E f_{X,Y}(x,y)dxdy$. לכן אם E הוא הריבוע $E=[0.5,1]\times[0.5,1]$,

$P\{X\in[0.5,1],Y\in[0.5,1]\}=P\{(X,Y)\in E\}=\iint_E f_{X,Y}(x,y)dxdy\iint_E 0dxdy=0$. מצד שני,

$P\{X\in[0.5,1]\}=P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f_{X,Y}(x,y)dxdy=cS(G)=\frac{S(G)}{S(V)}>0$, ו- $P\{Y\in[0.5,1]\}=P\{X\in[0.5,1]\}>0$.

לכן $0=P\{X\in[0.5,1],Y\in[0.5,1]\}\neq P\{X\in[0.5,1]\}\cdot P\{Y\in[0.5,1]\}>0$

.6

$$P\{(X,Y)\in A\}=\iint_A f_{X,Y}(x,y)dxdy=\int_1^2\left\{\int_0^{0.5}\frac{3x(x+y)}{5}dx\right\}dy=\int_1^2\left\{\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{x^3}{3}+\frac{yx^2}{2}\right)\right\}\Big|_{x=0}^{x=0.5}dy=\int_1^2\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{24}+\frac{y}{8}\right)dy=\frac{11}{80}$$

.7 לכל t,s $F_{X,Y}(t,s)=P\{X\le t,Y\le s\}=\int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{t}f_{X,Y}(x,y)dxdy$. פונקצית הצפיפות המשותפת $f_{X,Y}(x,y)$ שווה לאפס חוץ מריבוע $D=\{(x,y):0<x,y<1\}$, לכן מ"מ דו-ממדי (X,Y) בהסתברות 1 מקבל ערכים בתוך הריבוע D ומכאן ולכל תחום E על המישור $P\{(X,Y)\in E\}=P\{(X,Y)\in E\cap D\}$.

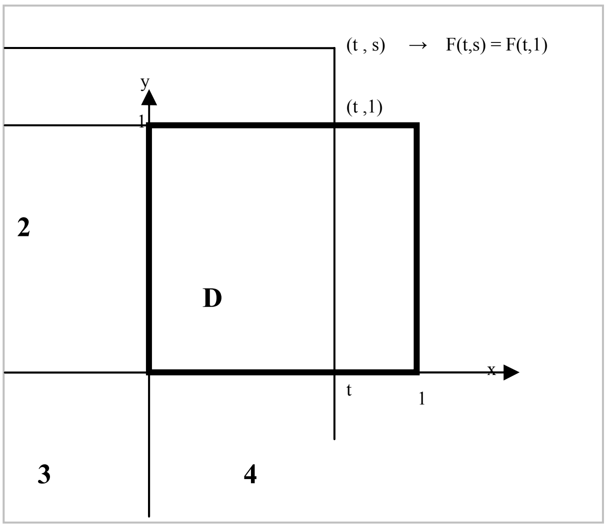
לכל (t,s) ברבעונים 4,3,2 נקבל $F_{X,Y}(t,s)=P\{X\le t,Y\le s\}=0$. עבור $t\ge1,s\ge1$, $F_{X,Y}(t,s)=1$.

עבור (t,s) שבתוך הריבוע D $(0\le t\le1, 0\le s\le1)$

$$F_{X,Y}(t,s)=P\{X\le t,Y\le s\}=\int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{t}f_{X,Y}(x,y)dxdy=\int_0^s\int_0^t(x+y)dxdy=\int_0^s\left(\frac{t^2}{2}+ty\right)dy=\frac{t^2s+ts^2}{2}.$$

עבור $0\le t\le1, s\ge1$ $F_{X,Y}(t,s)=P\{X\le t,Y\le s\}=P\{X\le t,Y\le1\}=F_{X,Y}(t,1)=\frac{t^2\cdot1+t\cdot1^2}{2}=\frac{t^2+t}{2}$.

עבור $t\ge1, 0\le s\le1$ $F_{X,Y}(t,s)=P\{X\le t,Y\le s\}=P\{X\le1,Y\le s\}=F_{X,Y}(1,s)=\frac{1^2\cdot s+1\cdot s^2}{2}=\frac{s^2+s}{2}$



$$F_{X,Y}(t,s)=\begin{cases}0, & t\le0 \quad or \quad s\le0\\ ts(t+s)/2, & 0<t,s<1\\ t(t+1)/2, & 0<t<1, s\ge1\\ s(s+1)/2, & 0<s<1, t\ge1\\ 1, & x,y\ge1\end{cases}$$

8. מרחב ההסתברות (Ω, P): מרחב המדגם Ω הוא כל $2^3 = 8$ התוצאות האפשריות ω של הטלת המטבע שלוש פעמים, מרחב ההסתברות סימטרי: לכל ω $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{8}$.

(א) הערכים האפשריים של מ"מ דו-מימדי $(X,Y) = (X(\omega), Y(\omega))$ הם זוגות (i, j) , כאשר $i, j = 1,2,3$. נמצא פונקציית ההסתברות המשותפת $p(i, j) = p_{X,Y}(i, j) = P\{X = i, Y = j\}$. נחשב כמה ערכים של הפונקציה $p(i, j)$. נסמן "עץ" ב-1, ו-"פלי" ב-0, ונקבל

y \ x	0	1	2	$p_Y(y)$
0	1/8	1/8	0	¼
1	1/8	2/8	1/8	1/2
2	0	1/8	1/8	1/4
$p_X(x)$	1/4	1/2	1/4	1

$P\{X = 0, Y = 0\} = P((0,0,0)) == \frac{1}{8}$,

$P\{X = 2, Y = 0\} = P(\emptyset) = 0$, $P\{X = 1, Y = 0\} = P((1,0,0)) = \frac{1}{8}$,

$P\{X = 1, Y = 1\} = P((1,0,1)) + P((0,1,0)) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

בשולי הטבלה מסכמים את ההסתברויות $p(i, j) = P\{X = i, Y = j\}$ ומקבלים את פונקציות ההסתברות השוליות של X, Y . מ"מ X, Y תלויים ,למשל מפני שמתקיים את האי-שביון

$$0 = p(2,0) = P\{X = 2, Y = 0\} \neq P\{X = 2\}P\{Y = 0\} = p(2)\cdot p(0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} .$$

(ב) $P(X = Y) = \sum_i P(X = i, Y = i) = \sum_i p(i,i) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

(ג) $X \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right)$ ו- $Y \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right)$, ומכאן $E(Y) = E(X) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$,

$V(Y) = V(X) = 2\cdot\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ (כי עבור $X \sim B(n, p)$, $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$).

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{4}, E(XY) = \sum_{(i,j)} ij\cdot p(i,j) = 1\cdot 1\cdot\frac{2}{8} + \cdot 1\cdot 2\cdot\frac{1}{8} + ... = 1\frac{1}{4}$$

$$, \rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{1/4}{\sqrt{1/2}\sqrt{1/2}} = \frac{1}{2} .$$

(ד)
$$V(X - Y) = Cov(X - Y, X - Y) = Cov(X, X) - 2Cov(X,Y) + Cov(Y,Y) =$$
$$= V(X) - 2Cov(X,Y) + V(Y) = \frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(ה) $P\{X = 0 / Y = 1\} = \frac{P\{X = 0, Y = 1\}}{P\{Y = 1\}} = \frac{p_{X,Y}(0,1)}{p_Y(1)} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}$, באופן דומה $P\{X = 1 / Y = 1\} = \frac{1}{2}$,

$P\{X = 2 / Y = 1\} = \frac{1}{4}$.