תרגול 7

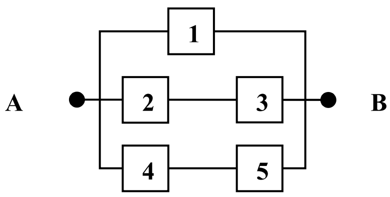
1. יהיו $X_1, X_2, ..., X_n \sim U(a,b)$ משתנים מקריים בעלי ההתפלגות האחידה על הקטע $[a,b]$ ובלתי-תלויים. מצא את פונקצית הצפיפות של המשתנים המקריים הבאים: (א) $\max(X_1, X_2, ..., X_n)$ (ב) $\min(X_1, X_2, ..., X_n)$

2. יהיו $X_1, X_2, ..., X_n \sim \exp(\lambda)$ משתנים מקריים $X_1, X_2, ..., X_n$ בעלי ההתפלגות המעריכית עם פרמטר λ ובלתי תלויים. מצא את פונקצית הצפיפות של המשתנים המקריים הבאים: (א) $\max(X_1, X_2, ..., X_n)$

(ב) $\min(X_1, X_2, ..., X_n)$

3. יהי X משתנה מקרי עם פונקצית התפלגות מצטברת F. מצא את פונקציות ההתפלגות של משתנים מקריים (א) $X^+ = \max(X,0)$ (ב) $X^- = \max(-X,0)$ וסרטט אותן.

4. נתונה מערכת אלקטרונית לפי קונפיגורציה הבאה



זמן החיים בשעות של כל אחד מהאלמנטים 2,3,4,5 הוא מ"מ מעריכי עם פרמטר $\lambda = 1$. האלמנט 1 עובד שעה אחת בדיוק ואחר-כך לא עובד בכלל. כל האלמנטים בלתי תלויים. נסמן ב- X_{AB} זמן החיים של המערכת AB. מצא את פונקצית ההתפלגות המצטברת של מ"מ X_{AB}.

5. יהי $X \sim U(-2,2)$ מ"מ אחיד. נגדיר משתנים מקריים Y ו- Z: $Y = \begin{cases} |X|, & |X| \le 1 \\ 1, & 1 < |X| < 3/2 \\ 2, & |X| \ge 3/2 \end{cases}$, $Z = Y^2$. מצא את פונקציות ההתפלגות של המשתנים המקריים Y ו- Z וסרטט אותן.

6. יהי $X \sim Exp(\lambda)$ ו- $Y = (1+X)/(1+2X)$. מצא את פונקציית הצפיפות של מ"מ Y.

7. מ"מ X בעל פונקציית צפיפות הבאה $f_X(x) = \begin{cases} (x+1)/2 & -1 < x < 1 \\ 0, & x \notin (-1,1) \end{cases}$ ו- $Y = 1 - X^2$. מצא את פונקציית הצפיפות של מ"מ Y.

8. יהי $X \sim U(-4,4)$ ו- $Y = \sin X$. מצא את פונקציית הצפיפות של מ"מ Y.

9. לקוח בא למשרד. פקידה המקבלת קהל פנויה בהסתברות p_1, שותה קפה בהסתברות p_2 במשך זמן של $X_2 \sim U(0,30)$ דקות, עסוקה עם לקוח הקודם בהסתברות p_3 במשך זמן של $X_3 \sim U(0,20)$ דקות או מפטפטת בטלפון בהסתברות p_4 במשך זמן של $X_4 \sim U(0,40)$ דקות. מצא את פונקצית ההתפלגות של זמן המתנה של הלקוח עד לקבלה אצל הפקידה.

.1 (א) $f(t) = \begin{cases} \dfrac{n}{b-a}\left(\dfrac{t-a}{b-a}\right)^{n-1} & t \in (a,b) \\ 0, & t \notin [a,b] \end{cases}$ (ב) $f(t) = \begin{cases} \dfrac{n}{b-a}\left(\dfrac{b-t}{b-a}\right)^{n-1} & t \in (a,b) \\ 0, & t \notin [a,b] \end{cases}$

.2 (א) $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ n\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}, & t \ge 0 \end{cases}$ (ב) $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ n\lambda e^{-\lambda n t}, & t \ge 0 \end{cases}$

.3 $F_{X^+}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ F(t), & t \ge 0 \end{cases}$, $F_{X^-}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - F((-t)^-), & t \ge 0 \end{cases}$

.4 $F_{X_{AB}}(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ (1-e^{-2t})^2, & t \ge 1 \end{cases}$

.5 $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t/2 & 0 \le t < 1 \\ 3/4 & 1 \le t < 2 \\ 1 & t \ge 2 \end{cases}$ $F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sqrt{t}/2 & 0 \le t < 1 \\ 3/4 & 1 \le t < 4 \\ 1 & t \ge 4 \end{cases}$

.6 $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{(2y-1)^2} e^{\lambda \frac{y-1}{2y-1}} & 0.5 < y < 1 \\ 0, & else \end{cases}$

.7 $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1-y}} & 0 < y < 1 \\ 0, & else \end{cases}$

.8 $f_Y(y) = \begin{cases} 1/4\sqrt{1-y^2}, & y \in (-1, \sin 4) \cup (\sin(-4), 1) \\ 3/8\sqrt{1-y^2}, & y \in (\sin 4, \sin(-4)) \\ 0, & else \end{cases}$

.9 $F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ p_1 + 13t/20, & 0 \le t < 20 \\ p_1 + p_3 + 7t(p_2 + p_4)/120, & 20 \le t < 30 \\ 1 - p_4 + tp_4/40, & 30 \le t < 40 \\ 1, & t \ge 40 \end{cases}$