

תרגול 6. פתרונות

1. (א) $Z \sim N(0,1)$ כאשר $P\{X \leq C\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{C-\mu}{\sigma}\right\} = P\left\{Z \leq \frac{C-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right) = 0.9$

מטבלת ההתפלגות המצטברת $\Phi(t)$ נקבל $\Phi(1.282) = 0.9$ ומכאן $C = \mu + 1.282\sigma \Leftrightarrow \frac{C-\mu}{\sigma} = 1.282$

(ב) $P\{|X - \mu| \leq C\} = P\{-C \leq X - \mu \leq C\} = P\left\{-\frac{C}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{C}{\sigma}\right\} = P\left\{-\frac{C}{\sigma} < Z \leq \frac{C}{\sigma}\right\} =$

$= \Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{C}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right) - 1 = 0.9$

(השתמשנו בתכונה: $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$). מכאן $\Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right) = \frac{1.9}{2} = 0.95$

$C = 1.645\sigma \Leftrightarrow \frac{C}{\sigma} = 1.645 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right) = \frac{1.9}{2} = 0.95$

(ג) $P\{9 < X < 12\} = P\left\{\frac{9-10}{6} < \frac{X-10}{6} < \frac{12-10}{6}\right\} = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{6}\right) =$
 $= 0.6293 - (1 - 0.5675) = 0.1968$

2. $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{0.1} \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2 \cdot 0.1}}$ - פונקציית הצפיפות של מ"מ X . ברור כי $0.95 \leq Y \leq 1.05$ ולכן, אם

קיימת פונקציית צפיפות של מ"מ Y , יתקיים $f_Y(y) = 0$ עבור $y \notin [0.95, 1.05]$. נמצא את פונקציית ההתפלגות של מ"מ Y : $F_Y(t) = P\{Y \leq t\} = P\{0.95 \leq X \leq 1.05\}$ לכל $t < 0.95$, $F_Y(t) = 1$ לכל $t \geq 1.05$, ועבור

$0.95 \leq t < 1.05$
 $F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(X \leq t/0.95 \leq X \leq 1.05) = \frac{P(\{X \leq t\} \cap \{0.95 \leq X \leq 1.05\})}{P(0.95 \leq X \leq 1.05)} =$

$\frac{P(0.95 \leq X \leq t)}{P(0.95 \leq X \leq 1.05)} = \frac{\int_{0.95}^t f_X(x) dx}{P(0.95 \leq X \leq 1.05)} = \int_{0.95}^t \frac{f_X(x)}{P(0.95 \leq X \leq 1.05)} dx$

מכאן, לפי הגדרת פונקציית הצפיפות, נקבל: $f_Y(y) = \frac{f_X(y)}{P(0.95 \leq X \leq 1.05)}$ עבור $y \in [0.95, 1.05]$ ו-1

$f_Y(y) = 0$ עבור $y \notin [0.95, 1.05]$.

ולכן $P(0.95 \leq X \leq 1.05) = P\left(\frac{0.95-1}{\sqrt{0.1}} \leq \frac{X-1}{\sqrt{0.1}} \leq \frac{1.05-1}{\sqrt{0.1}}\right) = \Phi\left(\frac{1.05-1}{\sqrt{0.1}}\right) - \Phi\left(\frac{0.95-1}{\sqrt{0.1}}\right) = 0.1256$

עבור $y \in [0.95, 1.05]$ $f_Y(y) = \frac{1}{0.1256 \cdot \sqrt{0.1} \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2 \cdot 0.1}} = \frac{25.19}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{0.2}}$

4. Y הוא מ"מ בדיד המקבל את שני ערכים: 1 ו-(-1), כי משום ש- X מ"מ רציף $P(Y=0) = P(X=0) = 0$

לפונקציית ההתפלגות המצטברת $P(Y = -1) = P(X < 0) = \int_{-\infty}^0 f(x)dx$, $P(Y = 1) = P(X > 0) = \int_0^{\infty} f_x(x)dx$

$F_Y(t)$ של מ"מ בדיד Y יש שתי קפיצות: בנקודה $t = -1$ הקפיצה בגודל $P(Y = -1)$ ובנקודה $t = 1$ הקפיצה

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ \int_{-\infty}^0 f(x)dx, & -1 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases} \quad \text{לכן } P(Y = 1) = 1 - P(Y = -1)$$

7. הערכים האפשריים של מ"מ X נמצאים בקטע $[0, \infty)$. פונקציה $y = g(x) = x^2$ כאשר $x \in [0, \infty)$ עולה ממש

מקבלת כל ערכים בקטע $[0, \infty)$ ויש לה פונקציה הפוכה $x = h(y) = g^{-1}(y) = \sqrt{y}$ המוגדרת לכל $y \in [0, \infty)$.

לפי המשפט על הצפיפות של טרנספורמציה $Y = g(X) = X^2$ של מ"מ X

$$f_Y(y) = 0 \quad y \notin [0, \infty) \quad \text{עבור } f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)| = 2\sqrt{y}e^{-(\sqrt{y})^2} \cdot |(\sqrt{y})'| = e^{-y} \quad (Y \sim \text{Exp}(1))$$

8. הערכים האפשריים של מ"מ X נמצאים בקטע $[0, 1]$, $f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$ (א)

$g: [0, 1] \rightarrow [-2\pi, 2\pi]$, $y = g(x) = 4\pi(x - 0.5)$, עולה ממש $x = \frac{y}{4\pi} + 0.5 \Leftarrow y = 4\pi(x - 0.5)$ לכן

לפי המשפט על הצפיפות של טרנספורמציה של מ"מ, עבור כל $y \in [-2\pi, 2\pi]$

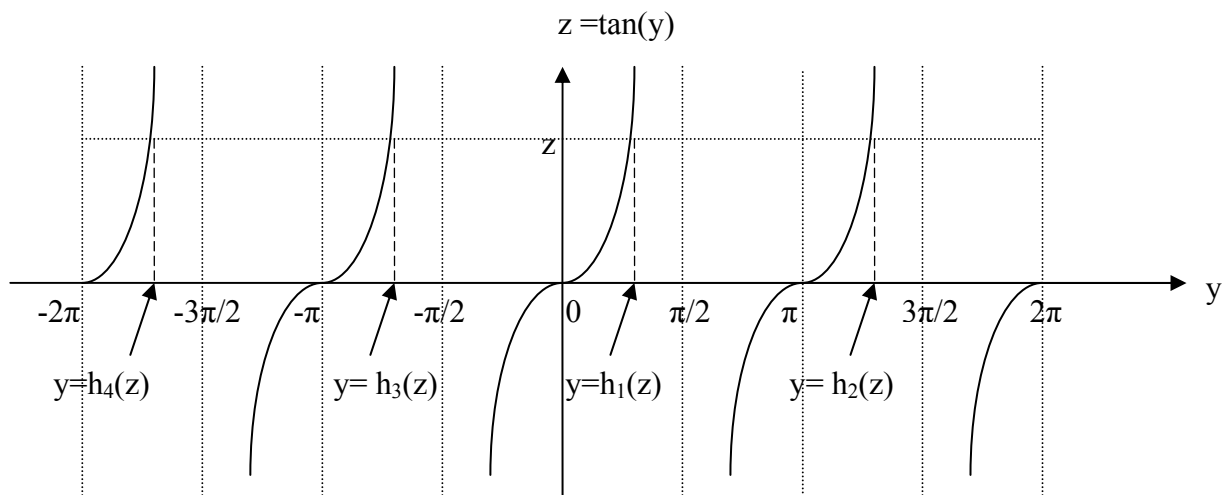
$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)| = 1 \cdot |(\frac{y}{4\pi})'| = 1 \cdot \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \quad \text{עבור } y \in [-2\pi, 2\pi] \quad \text{כלומר } Y \sim U(-2\pi, 2\pi)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}, & y \in [-2\pi, 2\pi] \\ 0, & y \notin [-2\pi, 2\pi] \end{cases} \quad \text{(ב) הערכים האפשריים של מ"מ } Y \text{ נמצאים בקטע } [-2\pi, 2\pi]$$

$g: [-2\pi, 2\pi] \rightarrow (-\infty, \infty)$, $z = g(y) = \tan y (=tg(x))$ עולה ממש במקוטעין: ב-5 קטעים

$$\Leftarrow z = g(y) = \tan y \quad z \geq 0 \quad \text{בנפרד.} \quad \left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right), \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

$$y = h_4(z) = \arctan z - 2\pi, \quad y = h_3(z) = \arctan z - \pi, \quad y = h_2(z) = \arctan z + \pi, \quad y = h_1(z) = \arctan z$$



לפי המשפט על הצפיפות של טרנספורמציה של מ"מ

$$f_Z(z) = \sum_{i=1}^4 f_Y(h_i(z)) \cdot |h'_i(z)| = 4 \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+z^2} \quad t \geq 0$$

באופן דומה, עבור $z < 0$

$$y = \tilde{h}_4(z) = \arctan z + 2\pi, \quad y = h_3(z) = \arctan z - \pi, \quad y = h_2(z) = \arctan z + \pi, \quad y = h_1(z) = \arctan z$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)} \quad \text{עבור כל } z \text{ ממשי.} \quad f_Z(z) = 4 \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+z^2} \quad \text{נקבל}$$

(ג) $X \in [0,1]$ בהסתברות 1. $y = g(x) = a + bx$. נתבונן בשלושה מקרים:

$$(1) \quad b > 0: \quad g: [0,1] \rightarrow [a, a+b] \text{ עולה ממש, } x = \frac{y-a}{b} \Leftarrow y = a + bx \text{ ולכן}$$

$$x = h(y) = g^{-1}(y) = \frac{y-a}{b} \quad \text{עבור } y \in [a, a+b] \text{ מ"מ,}$$

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)| = 1 \cdot \frac{1}{|b|} = \frac{1}{|b|} \quad \text{עבור } y \in [a, a+b] \text{ כלומר } Y \sim U(a, a+b)$$

$$(2) \quad b < 0: \quad g: [0,1] \rightarrow [a+b, a] \text{ יורדת ממש, } x = \frac{y-a}{b} \Leftarrow y = a + bx \text{ ולכן}$$

$$x = h(y) = g^{-1}(y) = \frac{y-a}{b} \quad \text{עבור } y \in [a+b, a] \text{ מ"מ,}$$

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)| = 1 \cdot \frac{1}{|b|} = \frac{1}{|b|} \quad \text{עבור } y \in [a+b, a] \text{ כלומר } Y \sim U(a+b, a)$$

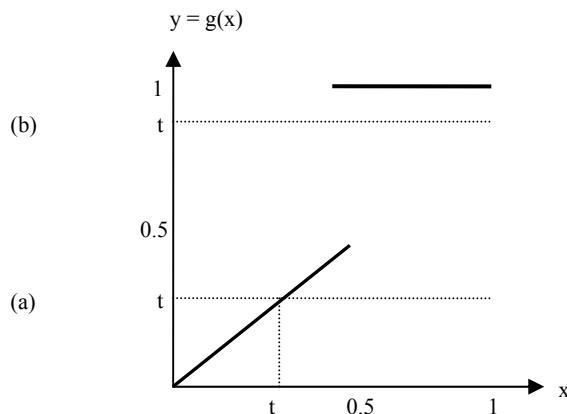
(3) $W \equiv a, b = 0$ - מ"מ בדיד (קבוע) ופונקציית צפיפות שלו אינה קיימת.

$$9. \quad X \sim \text{Exp}(\lambda) \Leftrightarrow F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad t \geq 0$$

$$\text{עבור } 0 \leq a \leq b \quad P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

$$\begin{aligned} P(\sin X > 0) &= P(0 < X < \pi) + P(2\pi < X < 3\pi) + P(4\pi < X < 5\pi) + \dots = \\ &= (1 - e^{-\pi\lambda}) + (e^{-2\pi\lambda} - e^{-3\pi\lambda}) + (e^{-4\pi\lambda} - e^{-5\pi\lambda}) + \dots = (1 + e^{-2\pi\lambda} + e^{-4\pi\lambda} + \dots) - (e^{-\pi\lambda} + e^{-3\pi\lambda} + e^{-5\pi\lambda} + \dots) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-2\pi\lambda})^k - e^{-\pi\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-2\pi\lambda})^k = \frac{1}{1 - e^{-2\pi\lambda}} - \frac{e^{-\pi\lambda}}{1 - e^{-2\pi\lambda}} = \frac{1}{1 + e^{-\pi\lambda}} \end{aligned}$$

$$10. \quad Y = g(X) = \begin{cases} X, & X \in [0, 0.5] \\ 1, & X \in [0.5, 1] \end{cases}, \quad X \sim U(0, 1)$$



$$(a) \quad \text{כאשר } 0 \leq t \leq 0.5 \quad F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(X \leq t) = t$$

(b) כאשר $0.5 < t \leq 1$, $F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(X \leq 0.5) = 0.5$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

ברור כי לכל $t < 0$, $F_Y(t) = 0$, ולכל $t \geq 1$, $F_Y(t) = 1$, לכן

11. יהיו X זמן ההמתנה ברמזור, מאורע A = "הרמזור מראה ירוק", \bar{A} = "הרמזור מראה אדום". $P(A) = 1/2$.

$$F_{X/A}(t) = P(X \leq t/A) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 \leq t \end{cases}$$

בתני שהרמזור מראה ירוק $X \equiv 0$ לכן

$$F_{X/\bar{A}}(t) = P(X \leq t/\bar{A}) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t \end{cases}$$

בתני שהרמזור מראה אדום $X \sim U(0,1)$ ולכן

לפי נוסחת ההסתברות השלמה

$$\begin{aligned} F_X(t) &= P(X \leq t) = P(X \leq t/A)P(A) + P(X \leq t/\bar{A})P(\bar{A}) = \\ &= F_{X/A}(t) \cdot \frac{1}{2} + F_{X/\bar{A}}(t) \cdot \frac{1}{2} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 \cdot \frac{1}{2} + t \cdot \frac{1}{2}, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t+1}{2}, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t \end{cases} \end{aligned}$$

12. $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ $0 \leq a \leq b \iff t \geq 0$ עבור $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

הערכים האפשריים של Y הם $k = 0, 1, 2, \dots$

$$P(Y = k) = P([X] = k) = P(k \leq X < k+1) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = e^{-\lambda k} (1 - e^{-\lambda})$$