

**תרגול 6**

1.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  (א) מצא את  $C$  כך ש- $P(X \leq C) = 0.9$ , (ב) מצא את  $C$  כך ש- $P(|X - \mu| \leq C) = 0.9$ , (ג) מצא את  $P(9 < X < 12)$  כאשר  $X \sim N(10, 36)$ .
2. מכונה אוטומטית מייצרת כדורי אספירין אשר משקלם  $X \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 0.1)$  גרם. מכונה אחרת מסוגת את התוצרת לשלוש קבוצות. כדורים בעלי משקל קטן מ-0.95 גרם הולכים לקבוצה A; כדורים בעלי משקל בין 0.95 ל-1.05 גרם הולכים לקבוצה B; כדורים בעלי משקל גדול מ-1.05 גרם הולכים לקבוצה C. כדור אחד נלקח מקבוצה B, נסמן את משקלו ב- $Y$ . מצא את פונקציית הצפיפות של מ"מ  $Y$ .
3. יהיה  $X \sim Exp(\lambda)$  ויהיה  $Y = X^3$  מצא את פונקציית הצפיפות של מ"מ  $Y$ .
4. יהיה  $X$  מ"מ רציף בעל פונקציית צפיפות  $f(x)$ .  $Y = \text{sgn}(X) \equiv \begin{cases} 1, & X > 0 \\ 0 & X = 0 \\ -1 & X < 0 \end{cases}$  מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של מ"מ  $Y$ .
5. אורך חיים של נורת רחוב  $X \sim N(1000, 40000)$  שעות. מצא את ההסתברות שלפחות 4 מתוך 1000 נרות ימשיכו להאיר לאחר 1600 שעות עבודה.
6. יהיה  $X \sim Exp(\lambda)$  ויהיה  $Y = 1/(1 - X)$  מצא את פונקציית הצפיפות של מ"מ  $Y$ .
7. מ"מ  $X$  בעל פונקציית הצפיפות הבאה:  $f(x) = 2xe^{-x^2}$ ,  $x \geq 0$  ו-0 אחרת. יהיה  $Y = X^2$  מצא את פונקציית הצפיפות של מ"מ  $Y$ .
8. יהיה  $X \sim U(0, 1)$  מצא את פונקציית הצפיפות של משתנים מקרים הבאים: (א)  $Y = 4\pi(X - 0.5)$  (ב)  $Z = \tan(Y)$  (ג)  $W = a + bX$ .
9. יהיה  $X \sim Exp(\lambda)$  מצא את  $P(\sin X > 0)$ .
10. נקודה נזרקת באופן מקרי על הקטע  $[0, 1]$ .  $X$  הוא מ"מ המוגדר כמרחק הנקודה מ-0. בהתאם להסכם מסוים דולר אחד ישולם אם  $X > 0.5$  ו- $X$  דולר ישולם אם  $X \leq 0.5$ . נסמן ב- $Y$  את התשלום ששולם כתוצאה מהניסוי. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של מ"מ  $Y$ .
11. רמזור מראה ירוק במשך דקה אחת ואדום במשך דקה אחת. מכונת מגיעה באופן מקרי לרמזור. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של זמן ההמתנה ברמזור.
12.  $X \sim Exp(\lambda)$  מצא את פונקציית ההסתברות של מ"מ בדיד  $Y = [X]$  (הערך השלם של  $X$ ).

**תרגול 6. תשובות**

1. (א)  $\mu + 1.28\sigma$  (ב)  $1.645\sigma$  (ג) 0.197 (ד)  $\frac{25 \cdot 19}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{0.2}}$ ,  $y \in [0.95, 1.05]$  (ה) 0,  $y \notin [0.95, 1.05]$
2.  $f_Y(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{t^2} e^{-\frac{\lambda}{t}}, & t \notin [0, 1] \\ 0, & t \in [0, 1] \end{cases}$
3.  $f_Y(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ \int_{-\infty}^0 f(x) dx, & -1 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$
4.  $f_Y(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{3} t^{-2/3} e^{-\lambda \sqrt[3]{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$
5.  $f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}, & y \in [-2\pi, -2\pi] \\ 0, & y \notin [-2\pi, -2\pi] \end{cases}$  (א)  $f_Y(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$
6.  $f_Z(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$  (ב)  $Y \sim U(-2\pi, 2\pi)$ :  $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}, & y \in [-2\pi, -2\pi] \\ 0, & y \notin [-2\pi, -2\pi] \end{cases}$
7. (א)  $W \sim U(a, a+b)$ ,  $b > 0$  (ב)  $W \sim U(a+b, a)$ ,  $b < 0$
8.  $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$
9.  $f_Y(k) = P\{Y = k\} = (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$
10.  $F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t+1}{2}, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$