

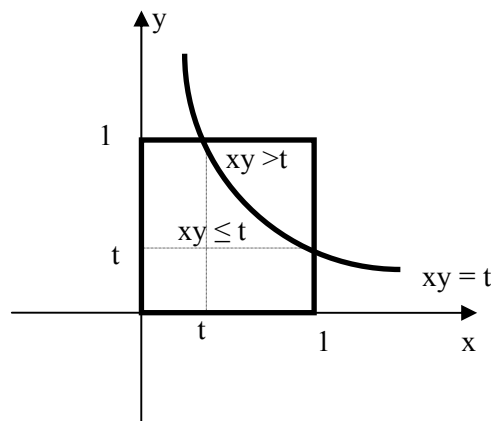
תרגול 11. פתרונות

1. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} a^2 x^{a-1} y^{a-1}, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \iff X, Y \text{ בלתי-תלויים}$ $f_Y(y) = \begin{cases} ay^{a-1}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}, f_X(x) = \begin{cases} ax^{a-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

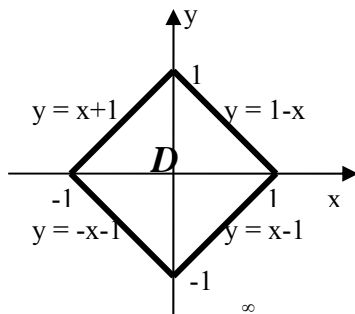
$Z = XY$. $0 \leq X \leq 1$ בהסתברות 1, וגם $0 \leq Y \leq 1$ בהסתברות 1. $0 \leq Z \leq 1$ בהסתברות 1. $F_Z(t) = 0$ עבור $t < 0$, $F_Z(t) = 1$ עבור $t \geq 1$. עבור $0 \leq t < 1$ נקבל:

$$F_Z(t) = P\{Z \leq t\} = P\{XY \leq t\} = 1 - P\{XY > t\} = 1 - \int_t^1 \int_{t/y}^1 a^2 x^{a-1} y^{a-1} dx dy = t^a (1 - a \ln t)$$

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^a (1 - a \ln t), & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 \leq t \end{cases}$$



2. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{else} \end{cases}$, כאשר D - הריבוע. $cS(D) = c \cdot 2 = 1 \iff c = 1/2$



ברור שעבור $x \notin [-1,1]$, $f_X(x) = 0$

עבור $x \in [-1,0]$: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_{-x-1}^{x+1} 1/2 dy = x+1$

עבור $x \in (0,1]$: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_{x-1}^{1-x} 1/2 dy = 1-x$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) dx = \int_{-1}^0 x(1+x) dx + \int_0^1 x(1-x) dx = 0$. $f_X(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

ברור ש- $E(X) = 0$, כי פונקציית הצפיפות של X זוגית.

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1/6$, $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-1}^0 x^2(1+x) dx + \int_0^1 x^2(1-x) dx = 1/6$

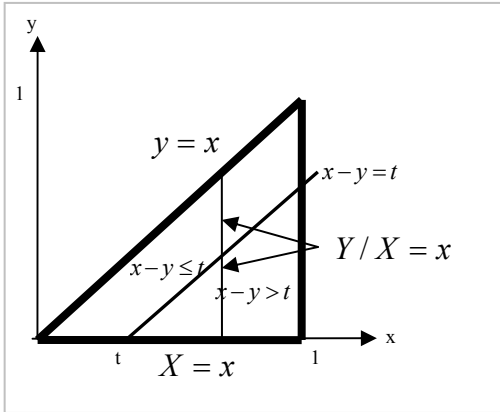
3. $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} \iff Y \sim N(0,\sigma^2), X \sim N(0,\sigma^2)$

עמוד 2 מתוך 3

$Z = X^2 + Y^2$. $F_Z(t) = 0 \Leftrightarrow Z \geq 0$ עבור $t < 0$. בקואורדינטות הקוטביות r, θ נקבל:

$$F_Z(t) = P\{Z \leq t\} = P\{X^2 + Y^2 \leq t\} = \iint_{x^2+y^2 \leq t} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} dx dy = \int_0^{\sqrt{t}} \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} d\theta dr = 1 - e^{-\frac{t}{2\sigma^2}}$$

$$F_Z(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/2\sigma^2}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y/x) \cdot f_X(x) \Leftrightarrow f_{Y|X}(y/x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \quad .4$$

$$P\{X-Y \leq t\} = \iint_{x-y \leq t} f_{X,Y}(x,y) dx dy \cdot f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot 1, & 0 < x < 1, 0 < y \leq x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

עבור $0 \leq t < 1$

$$P\{X-Y \leq t\} = \iint_{x-y \leq t} f_{X,Y}(x,y) dx dy =$$

$$1 - \iint_{x-y > t} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1 - \int_t^1 \left\{ \int_0^{x-t} \frac{1}{x} dy \right\} dx = 1 - \int_t^1 \frac{x-t}{x} dx = t - t \ln t \quad (8)$$

עבור $t < 0$, $P\{X-Y \leq t\} = 0$ עבור $t \geq 1$, $P\{X-Y \leq t\} = 1$

$$P\{Y \leq 1/4\} = \iint_{y \leq 1/4} f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_0^{1/4} \left\{ \int_0^1 \frac{1}{x} dx \right\} dy = - \int_0^{1/4} \ln y dy = (-y \ln y + y) \Big|_0^{1/4} = \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{4} \quad (9)$$

5. נגדיר מ"מ X_i כמספר הניסויים עד לקבלת מספר i -י חדש , $(i = 1, 2, \dots, n)$, אז מ"מ $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ הוא מספר הדגימות הכולל עד אשר ידגימו את כל המספרים $1, 2, \dots, n$

$$E(X_2) = \frac{n}{n-1} \Leftrightarrow X_2 \sim G\left(\frac{n-1}{n}\right) . E(X_1) = 1 \Leftrightarrow X_1 \equiv 1 . E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

$$\Leftrightarrow E(X_n) = \frac{n}{1} = n \Leftrightarrow X_n \sim G\left(\frac{1}{n}\right) \dots E(X_3) = \frac{n}{n-2} \Leftrightarrow X_3 \sim G\left(\frac{n-2}{n}\right)$$

$$E(X) = 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{1} = n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$E(Y) = \frac{1}{3} \text{ מטעמי סימטריה} . E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x) dx dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} 2x dy \right\} dx = \frac{1}{3} \quad .6$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{36} . E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x) dx dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} 2xy dy \right\} dx = \frac{1}{12}$$

7. נגדיר מ"מ X_i התלכדות במקום i -ה , $i = 1, 2, \dots, n$, אז $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $X_i = \begin{cases} 1, & \text{התלכדות במקום } i\text{-ה} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

$$E(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow P(X_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

הוא מספר ההתלכדויות הכולל .

עמוד 3 מתוך 3

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= E[(X_1 + X_2 + \dots + X_n)(X_1 + X_2 + \dots + X_n)] = \\
 &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j\right] = \sum_{i=1}^n E(X_i^2) + \sum_{i \neq j} E(X_i X_j), \quad E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \\
 \cdot E(X_i X_j) &= 1 \cdot \frac{1}{n(n-1)} \Leftarrow P\{X_i X_j = 1\} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, \quad i \neq j \text{ עבור } E(X_i^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{n} + 0^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \\
 \cdot V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - 1^2 = 1. \quad E(X^2) = \sum_{i=1}^n E(X_i^2) + \sum_{i \neq j} E(X_i X_j) = n \cdot \frac{1}{n} + n(n-1) \cdot \frac{1}{n(n-1)} = 2 \Leftarrow
 \end{aligned}$$

8. $\sigma^2 = V(X_i) = \frac{1}{12}$ $\mu = E(X_i) = \frac{1}{2}$ לכן $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$, $E(X) = \frac{a+b}{2} \Leftarrow, X \sim U(a, b)$

$\sigma = \sigma(X_i) = \sqrt{\frac{1}{12}}$ נסמן ב- S_n את הסכום $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. לפי משפט הגבול המרכזי

$P\left\{a < \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right\} \approx \Phi(b) - \Phi(a)$ לכן כאשר n גדול.

$$\begin{aligned}
 P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i > 6\right\} &= P\{S_{10} > 6\} = P\left\{\frac{S_{10} - 10\mu}{\sigma\sqrt{10}} > \frac{6 - 10\mu}{\sigma\sqrt{10}}\right\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{6 - 10\mu}{\sigma\sqrt{10}}\right) = \\
 &= 1 - \Phi\left(\frac{6 - 10 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{10/12}}\right) = 1 - \Phi(\sqrt{1.2}) \approx 0.14
 \end{aligned}$$

9. יהי X מספר הכדורים הפגומים. X הוא מ"מ בינומי $X \sim B(n, p)$, כאשר $n = 10000$, $p = 0.05$.

אפשר להציג כסכום $X = S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ של משתנים מקריים בלתי-תלויים $X_i = 1$: אם הכדור ה- i פגום,

ו- $X_i = 0$, אם הכדור ה- i תקין. נשתמש במשפט הגבול המרכזי. $\mu = E(X_i) = p$, $\sigma^2 = V(X_i) = p(1-p)$. ממשפט הגבול המרכזי נובע:

$$P\{X \leq C\} = P\{S_n \leq C\} = P\left\{\frac{S_n - np}{\sqrt{p(p-1)} \cdot \sqrt{n}} \leq \frac{C - 500}{\sqrt{475}}\right\} = P\left\{\frac{S_n - 500}{\sqrt{475}} \leq \frac{C - 500}{\sqrt{475}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{C - 500}{\sqrt{475}}\right) = 0.99$$

מכאן $\frac{C - 500}{\sqrt{475}} \approx 2.3263$ ו- $C \approx 550.7$, ז"א, קיבולת של המיכל צריכה להיות לפחות 551 כדורים.