תרגול 10. פתרונות

.1 $P\{X\le 1/Y<3\}=\dfrac{P\{X\le 1,Y<3\}}{P\{Y<3\}}$ **.** $P\{X\le 1,Y<3\}=\int_0^1\left\{\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dy\right\}dx=\frac{3}{8}$ **,**

$P\{Y<3\}=\int_0^2\left\{\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dy\right\}dx=\frac{5}{8}$ $\Leftarrow$ $P\{X\le 1/Y<3\}=\dfrac{P\{X\le 1,Y<3\}}{P\{Y<3\}}=\dfrac{3/8}{5/8}=\dfrac{3}{5}$

.2 (א) עבור $0\le x\le 1$ **,** $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_0^1\frac{2}{3}(x+2y)dy=\frac{2}{3}(x+1)$; אחרת $f_X(x)=0$ **.**

עבור $0\le y\le 1$, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\int_0^1\frac{2}{3}(x+2y)dx=\frac{1}{3}(4y+1)$; אחרת $f_X(x)=0$ **.**

(ב) $f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{\frac{2}{3}(x+1)}{\frac{1}{3}(1+4y)}=\dfrac{2(x+1)}{(1+4y)}$ לכל $0\le x\le 1$ **,** $0\le y\le 1$; אחרת $f_{X|Y}(x\,|\,y)=0$.

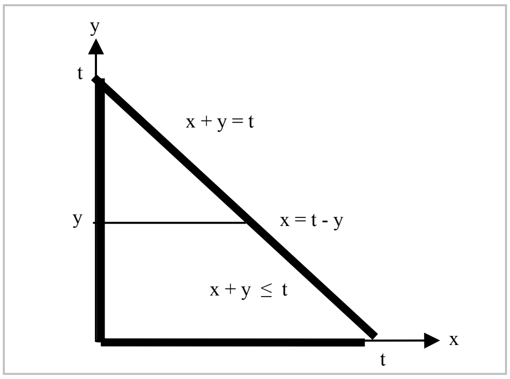
$\Leftarrow$ $f_{X|Y}(x\,|\,1/2)=\dfrac{2(x+1)}{(1+4\cdot 1/2)}=\dfrac{2(x+1)}{3}$, $0\le x\le 1$; אחרת $f_{X|Y}(x\,|\,1/2)=0$.

$P\{X\le 0.5/Y=1/2\}=\int_0^{0.5}f_{X|Y}(x\,|\,1/2)dx=\int_0^{0.5}\dfrac{2(x+1)}{3}dx=\dfrac{5}{12}$.

.3 $f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3z}, & x\ge 0\\ 0 & else\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y\ge 0\\ 0 & else\end{cases}$. X ו- Y בלתי-תלויים $\Leftarrow$ $f_{X,Y}(y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}6e^{-3x-2y}, & x\ge 0,y\ge 0\\ 0 & else\end{cases}$.

$F_Z(t)=P\{Z\le t\}=P\{X+Y\le t\}=\int_0^t\left\{\int_0^{t-y}6e^{-3x-2y}dx\right\}dy=1+2e^{-3t}-3e^{-2t}$ לכל $t\ge 0$ **,** $F_Z(t)=0$ לכל $t<0$.

$$f_Z(t)=\frac{d}{dt}F_Z(t)=\begin{cases}6(e^{-2t}-e^{-3t}), & t\ge 0\\ 0 & else\end{cases}$$

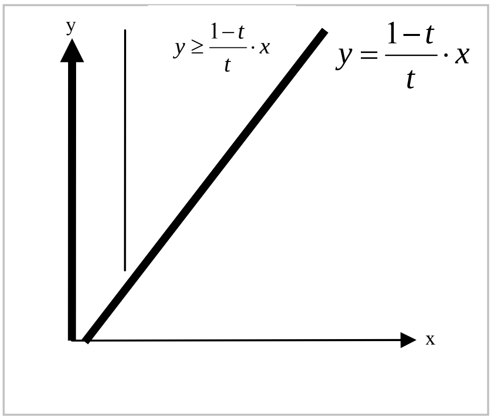


.4 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-z}, & x\ge 0\\ 0, & else\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\ge 0\\ 0 & else\end{cases}$. X ו- Y בלתי-תלויים $\Leftarrow$ $f_{X,Y}(y)=\begin{cases}e^{-x-y}, & x,y\ge 0\\ 0 & else\end{cases}$.

$Z=\dfrac{X}{X+Y}$ $\Leftarrow$ $0<Z\le 1$ $\Leftarrow$ עבור $t\le 0$, $F_Z(t)=0$ ו- עבור $t\ge 1$, $F_Z(t)=1$.

עבור $0<t<1$, $F_Z(t)=P\{Z\le t\}=P\left\{\frac{X}{X+Y}\le t\right\}=P\left\{Y\ge\frac{1-t}{t}\cdot X\right\}=\int_0^\infty\left\{\int_{\frac{1-t}{t}\cdot x}^\infty e^{-x-y}dy\right\}dx=t$ $\Leftarrow$

$f_Z(t)=\frac{d}{dt}F_Z(t)=\begin{cases}1, & 0<t<1\\ 0, & else\end{cases}$ $\Leftrightarrow Z\sim U(0,1)$.



5. מרחב ההסתברות (Ω,P): מרחב המדגם Ω הוא אוסף כל $\binom{6}{4}=15$ הקבוצות החלקיות בגודל 4 של הקבוצה $\{1,2,3,4,5,6\}$. P - ההסתברות הסימטרית על Ω: לכל $\omega\in\Omega$, $P(\omega)=\frac{1}{15}$.

(א) נסמן ב- X המספר המקסימלי שהוצא, ב- Y – המספר המינימלי שהוצא. הערכים האפשריים של מ"מ דו-מימדי (X,Y) הם זוגות (i,j) , כאשר $i=4,5,6$, $j=1,2,3$.

נחשב $p_{X,Y}(i,j)=P(X(\omega)=i,Y(\omega)=j\}=\frac{|\{\omega\,|\,X(\omega)=i,Y(\omega)=j\}|}{|\Omega|}$: לדוגמה $P\{X=4,Y=1\}=\frac{1}{15}$,

כי $\{X(\omega)=4,Y(\omega)=1\}\Leftrightarrow\omega=\{1,2,3,4\}$. $P\{X=6,Y=1\}=\frac{\binom{4}{2}}{15}=\frac{6}{15}$. מ"מ X,Y תלויים, כי

$p_{X,Y}(4,3)\ne p_X(4)p_Y(3)$. (ב) $E(X)=4\cdot\frac{1}{15}+5\cdot\frac{4}{15}+6\cdot\frac{10}{15}=\frac{84}{15}=5.6$,

$E(X^2)=4^2\cdot\frac{1}{15}+5^2\cdot\frac{4}{15}+6^2\cdot\frac{10}{15}=\frac{84}{15}=31.733$, $V(X)=31.733^2-5.6^2=0.373$,

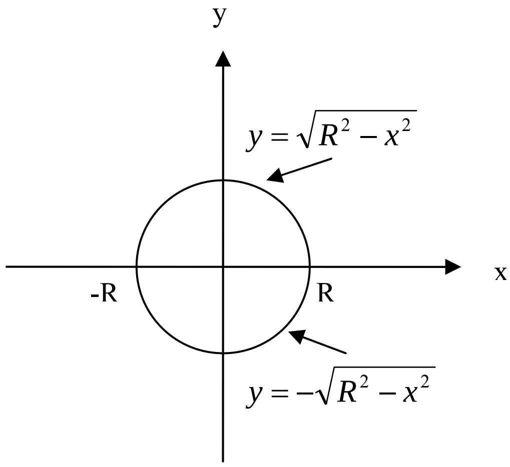
$E(Y)=1.4$, $E(Y^2)=2.333$, $V(Y)=0.373$. $E(XY)=4\cdot1\cdot\frac{1}{15}+\cdot5\cdot1\cdot\frac{3}{15}+...=7.933$,

$Cov(X,Y)=7.933-5.6\cdot1.4=0.093$, $\rho(X,Y)==\frac{0.093}{\sqrt{0.373}\sqrt{0.373}}=0.249$

$y \backslash x$	4	5	6	$p_Y(y)$
1	**1/15**	**3/15**	**6/15**	**10/15**
2	**0**	**1/15**	**3/15**	**4/15**
3	**0**	**0**	**1/15**	**1/15**
$p_X(x)$	**1/15**	**4/15**	**10/15**	**1**

6. (א) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1 \Leftarrow c\iint_{x^2+y^2\le R^2}dxdy=1$. האינטגרל הכפול $\iint_{x^2+y^2\le R^2}dxdy=1$ מייצג את שטח העיגול,

ולכן הוא שווה ל- πR^2 . מכאן נקבל $c=\frac{1}{\pi R^2}$.



(ב) $f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\frac{1}{\pi R^2}\int\limits_{y:x^2+y^2\le R^2} dy \;=\frac{1}{\pi R^2}\int\limits_{\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy$, כאשר $|x|\le R$. לכן

$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2} & , \ |x|\le R \\ 0 & , \ |x|>R\end{cases}$. מטעמי סימטריה, פונקציית הצפיפות השולית של Y נתונה על-ידי –

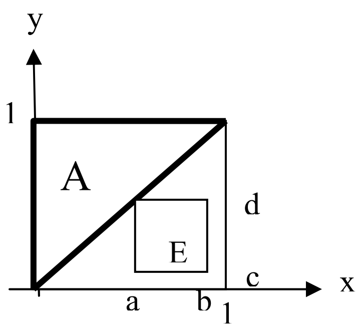
$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2} & , \ |y|\le R \\ 0 & , \ |y|>R\end{cases}$. (ג) פונקציית ההתפלגות המצטברת של $D=\sqrt{X^2+Y^2}$: לכל $0\le t\le R$ מתקיים

$$F_D(t)=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le t\right\}=P\left\{X^2+Y^2\le t^2\right\}=$$
$$\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,ydxdy=\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} dydx=\frac{\pi t^2}{\pi R^2}==\frac{t^2}{R^2}$$

, לכן $F_D(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0 \\ \frac{t^2}{R^2} & , \quad 0\le t<R \\ 1 & , \quad R\le t\end{cases}$.

(ד) $E(D)=-\int\limits_{-\infty}^{0} F_D(t)dt+\int\limits_{0}^{\infty}(1-F_D(t))dt=\int\limits_{0}^{R}\left(1-\frac{t^2}{R^2}\right)dt=R-\frac{R^3}{3R^2}=\frac{2}{3}R$

7. (א) $\frac{1}{8}\cdot 1=c\iint\limits_{0\le x\le y\le 1} xydxdy=c\int\limits_0^1 x\left(\int\limits_x^1 ydy\right)dx=c\int\limits_0^1 x\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=c$ $\Leftarrow$ $c=8$.



(ב), נבחר מספרים a,b,c,d כמו בשרטוט, נקבל

$0=P\{a\le X\le b, c\le Y\le d\}\neq P\{a\le X\le b\}\cdot P\{c\le Y\le d\}>0$, לכן X,Y - תלויים.

(ג) $E(X)=\int_0^1 x\left(4x-4x^3\right)dx=\frac{8}{15}$, $E(Y)=\int_0^1 y\left(4y^3\right)dx=\frac{4}{5}$,

$E(XY)=\int_0^1\left(\int_0^y xy(8xy)dx\right)dy=\int_0^1\left(\frac{8y^5}{3}\right)dy=\frac{4}{9}$, $Cov(X,Y)=\frac{4}{9}-\frac{8}{15}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{225}$.

$V(X+Y)=Cov(X+Y,X+Y)=Cov(X,X)+2Cov(X,Y)+Cov(Y,Y)=V(X)+2Cov(X,Y)+V(Y)$.

$Cov(X-Y,X+Y)=Cov(X,X)+Cov(X,Y)-Cov(Y,X)-Cov(Y,Y)=V(X)-V(Y)$

$E(X^2)=\int_0^1 x^2\left(4x-4x^3\right)dx=\frac{1}{3}$, $E(Y^2)=\int_0^1 y^2\left(4y^3\right)dx=\frac{2}{3}$, $V(X)=\frac{1}{3}-\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{1}{81}$

$V(Y)=\frac{2}{3}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{6}{25}$. מכאן נחשב $V(X+Y)$ ו- $Cov(X-Y,X+Y)$.

8. $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}1, & -1\le y\le 0\\ 0 & else\end{cases}$. X ו- Y בלתי-תלויים $\Leftarrow$ $f_{X,Y}(y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, -1\le y\le 0\\ 0 & else\end{cases}$.

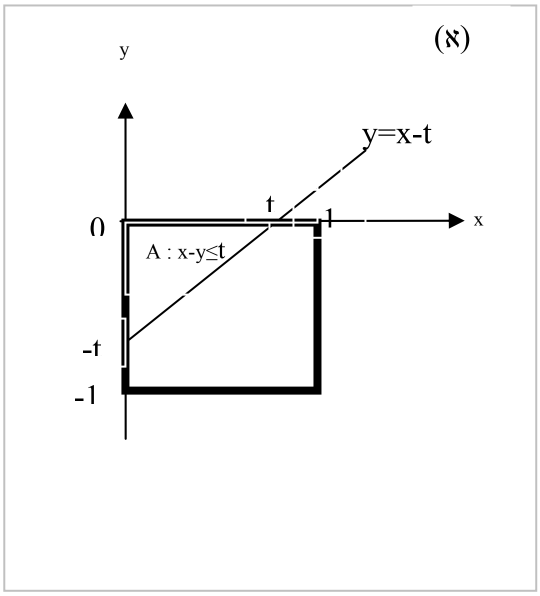
$Z=X-Y \Leftarrow$ $0\le Z\le 2$ בהסתברות 1. $\Leftarrow$ עבור $t<0$, $F_Z(t)=0$ ו- עבור $t\ge 2$, $F_Z(t)=1$.

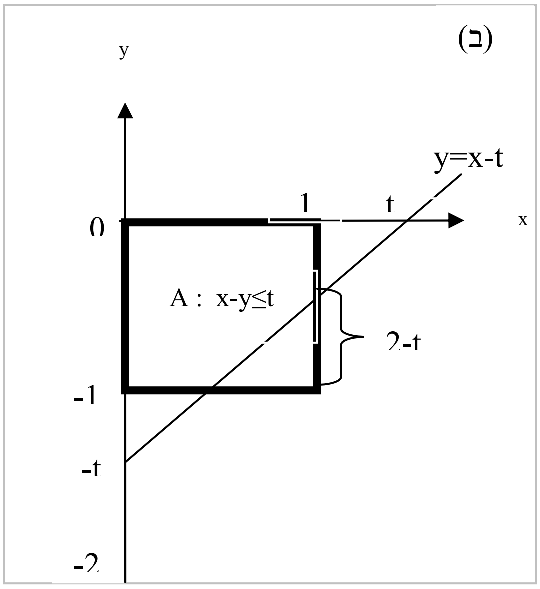
עבור $0<t\le 1$ (מקרה (א))

$F_Z(t)=P\{Z\le t\}=P\{X-Y\le t\}=P\{(X,Y)\in A=\{(x,y):x-y\le t\}\}=\iint_A 1dxdy=S(A)=\frac{t^2}{2}$.

עבור $1<t<2$ (מקרה (ב)) $F_Z(t)=P\{X-Y\le t\}=P\{(X,Y)\in A\}=\iint_A 1dxdy=S(B)=1-\frac{(2-t)^2}{2}$.

$f_Z(t)=\frac{d}{dt}F_Z(t)=\begin{cases}t & , & 0<t\le 1\\ 2-t & , & 1<t<2\\ 0 & , & else\end{cases}$.





9. לכל $n=0,1,...$

$$P\{Z=n\}=\sum_{k=0}^{n}P\{X=k,Y=n-k\}=\sum_{k=0}^{n}P\{X=k\}P\{Y=n-k\}=\sum_{k=0}^{n}P\{X=k\}P\{Y=n-k\}=$$

$$\sum_{k=0}^{n}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}\cdot e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n$$

(השוויון השני נובע מאי-תלות בין X ו- Y), ז"א $Z\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$: מ"מ פואסוני עם פרמטרים $\lambda_1+\lambda_2$.

(ב) לכל $k=0,1,...,n$ מתקיים

$$P\{X=k/X+Y=n\}=\frac{P\{X=k,X+Y=n\}}{P\{X+Y=n\}}=\frac{P\{X=k,Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}=\frac{P\{X=k\}P\{Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}=$$

$$=e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}\cdot e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\Big/\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k},$$

ז"א, ההתפלות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$ היא $B\left(n,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_1}\right)$: בינומית עם פרמטרים n ו- $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_1}$.