

תרגול 10

1. נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת, $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4, \\ 0, & \text{else} \end{cases}$. מצא (א) את $P\{X \leq 1/Y < 3\}$.
2. נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת, $f_{X,Y}(u,v) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y), & 0 < x, y < 1, \\ 0, & \text{else} \end{cases}$ של מ"מים X ו- Y . מצא (א) את פונקציות הצפיפות השוליות של מ"מ X ומ"מ Y . (ב) את $P\{X \leq 0.5/Y = 0.5\}$.
3. מ"מים מקריים $X \sim \text{Exp}(3)$ ו- $Y \sim \text{Exp}(2)$ בלתי-תלויים. מצא את פונקציית הצפיפות של מ"מ $Z = X + Y$.
4. מ"מים מקריים $X \sim \text{Exp}(1)$ ו- $Y \sim \text{Exp}(1)$ בלתי-תלויים. מצא את פונקציית הצפיפות של מ"מ $Z = \frac{X}{X+Y}$.
5. בכד 6 כדורים הממוספרים 1,2,3,4,5,6. מוציאים אקראית 4 כדורים מהכד ללא החזרה. יהיו X המספר המקסימאלי שהוצא, Y המספר המינימאלי שהוצא. (א) מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X, Y ופונקציות ההסתברות השוליות של X ו- Y . האם מ"מ X, Y בלתי תלויים? (ב) חשב את $\rho(X, Y)$.
6. יהיו X, Y מ"מים בעלי הצפיפות המשותפת $f(x,y) = \begin{cases} c, & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$, כאשר c - קבוע. מצא (א) את הקבוע c , (ב) את פונקציות הצפיפות השוליות, (ג) את פונקציית ההתפלגות של מרחק D מן נקודה מקרית (X, Y) לראשית הצירים, (ד) את $E(D)$.
7. יהיו X, Y מ"מים בעלי צפיפות המשותפת $f(x,y) = \begin{cases} cxy & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) \notin A \end{cases}$, כאשר $A = \{(x,y) | 0 \leq x \leq y \leq 1\}$. מצא את הקבוע c , (ב) האם X, Y בלתי תלויים? (ג) מצא את $\text{Cov}(X, Y)$, $\text{Cov}(X-Y, X+Y)$, $V(X+Y)$.
8. מ"מים מקריים $X \sim U(0,1)$ ו- $Y \sim U(-1,0)$ בלתי-תלויים. מצא את פונקציית הצפיפות של מ"מ $Z = X - Y$.
9. יהיו X ו- Y מ"מים פואסוניים בלתי-תלויים עם פרמטרים λ_1 ו- λ_2 , בהתאמה. (א) מצא את פונקציית ההסתברות של מ"מ $Z = X + Y$ (ב) מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $X + Y = n$ לכל $n = 0, 1, \dots$

תרגול 10. תשובות

1. 3/5. 2. (א) $f_X(x) = \frac{2}{3}(x+1)$, $0 \leq x \leq 1$; אחרת, 0. $f_Y(y) = \frac{1}{3}(1+4y)$, $0 \leq y \leq 1$; אחרת, 0. (ב) 5/12.

$x \backslash y$	4	5	6	$p_Y(y)$
1	1/15	3/15	6/15	10/15
2	0	1/15	3/15	4/15
3	0	0	1/15	1/15
$p_X(x)$	1/15	4/15	10/15	1

3. $f_Z(z) = \begin{cases} 6(e^{-2z} - e^{-3z}), & z \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$. 4. $Z \sim U(0,1)$.

(ב) $\frac{1}{\pi R^2}$ (א) 6. $\rho(X, Y) = 0.249$ (ב)

(ג) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2}, & |x| \leq R \\ 0, & |x| > R \end{cases}$

7. $\frac{2}{3}R$ (ג) 8. $\text{Cov}(X, Y) = 4/225$ (ג) 9. $F_D(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t^2}{R^2}, & 0 \leq t < R \\ 1, & R \leq t \end{cases}$

9. $B\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)$ (ב) $Z \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$ (א)