

**תרגול 9-10**

1. אדם משתתף בהגרלה בה הוא יכול להרוויח או להפסיד סכום כסף מסוים. נסמן את הרווח הכספי של האדם במשתנה מקרי  $X$ , כך ש:  $X = (-1)^k (k+1)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . בהסתברות  $P(x_k) = \frac{1}{k(k+1)}$ . מצא את התוחלת של  $X$ , אם היא קיימת.

2. תהי  $A$  נקודה הנבחרת באופן מקרי ואחיד בקטע  $[0, 1]$ , ומחלקת אותו לשני חלקים:  $[0, A]$  ו- $[A, 1]$ . נסמן את אורך החלק הקטן ב- $X$ . מצא את פונקציית הצפיפות של  $X$ .

3. אורך חיי מנוע (בשעות) מפולג מעריכית עם פרמטר  $\lambda$ .  $M$  מנועים דלוקים במשך  $\frac{1}{\lambda}$  שעות. מצא את ההסתברות שאף מנוע לא יתקלקל (בהנחה שכל מנוע עובד ללא תלות באחרים).

4. יהי נניח ש- $X$  הוא משתנה מקרי אשר מפולג מעריכית עם  $\lambda > 0$ . נגדיר  $Y = X^3$  ו  $Z = \sin(X)$ .

מצא פונקציה צפיפות של  $Y$ . מצא  $P(Z > 0)$ .

5.  $X$  הוא משתנה מקרי בעל פונקציה צפיפות נגדיר  $Y = X^2$ .  
 $f_x(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}, & x > 0 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$

מצא פונקציה התפלגות וצפיפות של  $Y$ .

6. יהי נניח ש- $X$  הוא משתנה מקרי רציף המפולג אחיד בקטע  $[-1, 3]$ . נגדיר  $Y = X^4$ . מצא פונקציה צפיפות של  $Y$ .

7. נתון מ"מ  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . מצא את פונקציית הסתברות של  $Y = \lfloor X \rfloor$  ופונקציה התפלגות של  $Y$ .

8. נניח ש- $X$  הוא משתנה מקרי אשר מפולג מעריכית עם  $\lambda = \frac{1}{4}$ . נגדיר

$$Y = \begin{cases} X, & X \geq 4, \\ 1, & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצא את פונקציית ההתפלגות של  $Y$ . האם  $Y$  הינו משתנה מקרי רציף?

9.  $X$  הוא משתנה מקרי בעל פונקציית התפלגות  $F_X(t)$ . נגדיר משתנים מקריים

$$X^- = \max(-X, 0) \text{ ו } X^+ = \max(X, 0)$$

מצא פונקציות התפלגויות של מ"מ.

10. נתונים משתנים מקריים  $Y_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $i=1\dots m$ . נתון  $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m$ , מצא את התוחלת של  $X$ .

11. יהי  $X$  משתנה מקרי בעל התפלגות גמא, כך שפונקציית הצפיפות שלו היא:  $f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$ ,  $x > 0$ , כאשר  $\lambda, \alpha > 0$ . מצא את התוחלת של  $X$ .

12. נתונה פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי רציף  $X$ :  

$$f_x(t) = \begin{cases} a, & 0 \leq t \leq 1 \\ b, & 1 < t \leq 4 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

- כאשר  $a$  ו- $b$  הינם קבועים. נתון  $E[X]=1.5$ .
- חשב את  $a$  ואת  $b$ .
  - חשב את פונקציית ההתפלגות  $F_x(t)$ .
  - חשב את  $P(0.5 < X \leq 2 | X > 1)$ .

13. נתונה פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי הרציף  $X$ :  

$$f_x(t) = \begin{cases} a(2e^{-t} + 3e^{-2t}), & t \geq 0, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$
 מצא את התוחלת של  $X$ .

14. פונקציית הצפיפות של מ"מ הינה  $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{x^2}{1+x^4}$ ,  $-\infty < x < \infty$ . מצא את תוחלת  $X$ , (אם קיימת).

15. בניח  $X$ -ש הוא משתנה מקרי משאלה 8. חשב את התוחלת של  $Y$ .