

תרגולים 7-8 התפלגויות מיוחדות בדידות ומבוא לתוחלת

1. שיכור עושה בכל שלב צעד ימינה או צעד שמאלה, בהסתברות 0.5 לכל אפשרות. ידוע כי מבין 100 צעדיו הראשונים, היו 60 ימינה ו-40 שמאלה. כיצד מפולג מספר הצעדים ימינה מבין 50 הצעדים הראשונים? הצע שתי דרכים לפתרון והראה כי הן שקולות.
2. מספר האנשים X הפונים ללשכת המידע במשך שעה אחת מתפלג פואסונית עם פרמטר λ . כל אחד מהפונים מקבל תשובה נכונה בהסתברות p ותשובה שגויה בהסתברות $q=1-p$. מצא את פונקציית ההסתברות של מספר האנשים Y המקבלים תשובה שגויה.
3. כד מכיל 2 כדורים לבנים ו-4 שחורים. מוציאים מהכד 3 כדורים ללא החזרה (להלן סבב). אם כדור אחד לבן ושני האחרים שחורים, אזי מסימים את הנסוי. אחרת, מחזירים את הכדורים לכד וממשיכים את הנסוי עד לקבלה, בפעם הראשונה, של כדור לבן ושני כדורים שחורים. נסמן ב- X את מספר הסבבים של המשחק וב- Y את מספר הפעמים בהם כל שלושת הכדורים היו שחורים.
 - א. מהי ההתפלגות של המ"מ X ?
 - ב. מהי ההתפלגות של המ"מ Y ?
 - ג. האם המאורעות $\{Y = 500\}$ ו- $\{X = 1000\}$ ב"ת?
4. שני שחקנים מטילים מטבע לפי תור, אחד אחרי השני, עד שיתקבל בפעם הראשונה "עץ". השחקן המסיים את המשחק מנצח ומקבל n ש"ח, כאשר n הינו מספר ההטלות במשחק. נסמן ב- X את הרווח של השחקן הראשון, וב- Y את הרווח של השחקן השני.
 - א. מהי ההסתברות של כל אחד מהשחקנים לנצח?
 - ב. מצא את פונקציית ההסתברות של X ושל Y .
 - ג. מהי $E(X)$?
5. מהקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$ בוחרים מספרים אחד אחרי השני עם החזרה, עד אשר כל איבר נבחר לפחות פעם אחת. מצא את תוחלת מספר הדגימות הנדרש.
6. כל אחת מ- n חיות יכולה לחלות בהסתברות p . נערך נסוי בצורה הבאה: בשלב הראשון נלקח מדגם דם מכל חיה, כל המדגמים מעורבים יחד בכלי אחד והמדגם המעורב נבדק, כבדיקה אחת. אם לא התגלתה מחלה, מפסיקים את הנסוי. אם התגלתה מחלה, אזי מכל חיה לוקחים שוב מדגם דם, אך הפעם בודקים כל מדגם בפני עצמו. נסמן ב- X את מספר הבדיקות. חשב את תוחלתו.
7. קוביה נזרקת n פעמים. המ"מ X הוא סכום התוצאות הזוגיות והמ"מ Y הוא סכום התוצאות הקטנות או שוות ל-3. האם $E(X) = E(2Y)$?

8. בכד כדור אחד לבן ואחד שחור. מוציאים שוב ושוב כדור אחד באקראי מהכד ומחזירים אותו בתוספת עוד כדור בעל אותו צבע. התהליך מסתיים כאשר לפחות כדור שחור אחד ולפחות כדור לבן אחד הוצאו מהכד. יהי X מספר השלב בו התקבל כדור לבן בפעם הראשונה ו- Y מספר השלב בו התקבל כדור שחור בפעם הראשונה. (לדוגמא, אם שלוש פעמים הוצא כדור שחור, וכל פעם הוחזר עם כדור שחור נוסף, ובפעם הרביעית הוצא כדור לבן, אזי $X = 4, Y = 1$).

מצא:

א. $P(X = k)$.

ב. $E(X)$ (אם קיימת)

ג. $E\left(\frac{X+1}{2^X}\right)$. רמז: $|x| < 1$. $\ln(1-x) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}$

ד. $P(X = 100 | Y = 1)$.

ה. האם המשתנים המקריים X, Y מפולגים גיאומטרית עם אותו פרמטר?

9. אריזה מכילה אלף רכיבים אלקטרוניים. פגם יכול להופיע בכל רכיב בהסתברות 0.005 (חמש אלפיות). מצא את ההסתברות שבאריזה יש בדיוק שלושה רכיבים פגומים.

10. נתונה פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי $X: f(x) = a \cdot |x| \cdot e^{-x^2}$. מצא את a ופונקציית התפלגות של X .

11. נתונה פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי הרציף X :

$$f_x(t) = \begin{cases} a(2e^{-t} + 3e^{-2t}), & t \geq 0, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצא את a .