

תרגול 2 : הסתברות בסיסית וקומבינטוריקה

1. כמה מילים באורך n אפשר ליצור מהאותיות A, B, C, D, E , כך ש- E תופיע מספר זוגי של פעמים?
2. בעזרת פונקציה יוצרת הוכח:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$$

רמז: $(1+x)^{2n} = ((1+x)^n)^2$.

3. מטילים קוביית משחק 10 פעמים. מצא את ההסתברויות הבאות: (א) "4" לא מתקבל אף פעם. (ב) "4" מתקבל בדיוק 4 פעמים. (ג) "4" מתקבל לפחות פעם אחת. (ד) ... לפחות פעמיים. (ה) ... לכל היותר פעמיים.
4. n אנשים עומדים בשורה, ביניהם איציק ושמוליק. מצא את ההסתברות שבין איציק ושמוליק יפרידו בדיוק k אנשים.
5. שחקן מרוויח \$1 כאשר בהטלת מטבע מתקבל "עץ" ומפסיד \$1 במקרה השני. לשחקן היו \$2n דולרים לפני המשחק. מצא את ההסתברות שאחרי $2n$ הטלות לשחקן יהיה אותו הסכום.
6. מטילים קובייה סימטרית 36 פעמים. מצא את ההסתברות לקבל כל מספר על הקובייה שש פעמים.
7. מניחים k צריחים על לוח שחמט בגודל $n \times m$ ($k \leq m, n$). מצא את ההסתברות ככך ששום זוג צריחים אינם מאימים אחד על השני.
8. מוציאים באופן מקרי תת-קבוצה (אולי ריקה) מהקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$ לפי הכלל הבא: עבור כל איבר מטילים מטבע; אם "עץ" אז האיבר שייך לתת-קבוצה, אחרת-- לא. לאחר שהתת-קבוצה נבחרה בוחרים לפי אותו תהליך את התת-קבוצה השניה. מהי ההסתברות שהשתי התת-קבוצות זרות?
9. מטילים קובייה הוגנת עד לקבלה הראשונה של תוצאה "4". מהי ההסתברות שזה יקרה: (א) בהטלה ה-10 (ב) לפני ההטלה ה-10 (ג) אחרי ההטלה ה-10?
10. נתון כי $P(A)=P(B)=0.5$. הוכח כי $P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B)$.
11. נתון אוסף של שני מאורעות A, B . $P(A)=\alpha$; $P(B)=\beta$; $P(A \cap B)=\gamma$. מצא את ההסתברויות הבאות: (א) קורים בדיוק K מאורעות מהאוסף $(K=0,1,2)$. (ב) קורים לפחות K מאורעות מהאוסף $(K=0,1,2)$. (ג) קורים לכל היותר K מאורעות מהאוסף $(K=0,1,2)$.

תשובות חלקיות:

$$(1) \frac{5^n + 3^n}{2};$$

$$(2) \frac{3^n}{4^n}; \quad (3) \frac{\binom{m}{k} \binom{n}{k} k!}{\binom{m \cdot n}{k}}; \quad (4) \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}; \quad (5) \frac{\binom{36}{6,6,6,6,6,6}}{6^{36}}; \quad (6) \frac{2(n-k-1)}{n(n-1)}; \quad (7) \frac{\binom{m}{k} \binom{n}{k} k!}{\binom{m \cdot n}{k}}; \quad (8) \frac{3^n}{4^n};$$