

**תרגול 12-11**

1. נתון מ"מ  $X \sim \bar{B}(r, p)$ . חשב את  $V(X)$  בדרך ישירה.

2. נתונה פונקציית הצפיפות של המ"מ  $X$ :

$$f_x(t) = \begin{cases} \frac{3}{t^4}, & t \geq 1, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

נגדיר  $Y = \frac{1}{X}$ . מצא את:

א.  $E(X)$ ,  $V(X)$ .

ג.  $E(Y)$ ,  $V(Y)$ .

3. נתון מ"מ בעל פונקציית הצפיפות

$$f_x(x) = \begin{cases} c(a+x), & -a \leq x \leq 0, \\ c(a-x), & 0 < x \leq a, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

כאשר  $a > 0$ . חשב את  $V(X), E(X), c$ .

4. נתון מ"מ בעל פונקציית הצפיפות

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{2}{7}(2e^{-x} + 3e^{-2x}), & x > 0, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

חשב את  $V(X)$ .

5. נתון מ"מ  $X \sim U(0,1)$ . נגדיר מ"מ  $Y = aX + b$ ,  $a \neq 0$ .

חשב את  $V(Y), E(Y)$ .

6. נזכיר דוגמא מהכתה: מטילים מ"מ של  $X$  מספר העצים בשתי ההטלות הראשונות ו-  $Y$  מספר העצים בשתי ההטלות האחרונות.

- א. מצא את פונקציית ההתפלגות של  $F_{X,Y}(x,y)$  מ"מ  $(X,Y)$ .
- ב. מצא את פונקציית ההסתברות של  $Z = X + Y$ . חשב  $E(Z), V(Z)$ .
- ג. הסבר אינטואיטיבי (ללא חישוב מפורש של  $COV(X,Y)$ ) האם  $X, Y$  בלתי מתואמים או מתואמים חיובית/ שלילית?
- ד. חישוב  $COV(X,Y)$  בלפחות 2 דרכים.

7. נתון מ"מ  $X \sim \bar{B}(r, p)$ .  
חשב את  $V(X)$  ע"י אי-תלות.

8.  $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$  ובלתי תלויים. הוכח:  $X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

9. בכד יש שלושה כדורים: אחד לבן, אחד שחור ואחד אדום. שלושה אנשים בוחרים כדור אחד בזה אחר זה עם החזרה. נסמן ב-  $X$  את מספר הצבעים השונים בכדורים שנבחרו וב-  $Y$  את מספר האנשים שבחרו כדור לבן. מצא את:

- (א) פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X, Y$ .
- (ב) פונקציית ההסתברות של  $Z = X - Y$ .
- (ג)  $P(X + Y \leq 3 | X - Y \geq 1)$ .
- (ד) פונקציית ההסתברות השולית של  $X$ .
- (ה) פונקציית ההסתברות המותנית  $P(\cdot | X = 1)$  וחשב  $E(Y | X = 1)$ .
- (ו)  $COV(X, Y)$ .
- (ז)  $V(X)$ .
- (ח) האם  $X, Y$  בלתי תלויים.

10.

א) אורכי החיים (בשעות) של נורות מסוג A ומסוג B הינם משתנים מקריים המפולגים  $Exp(1)$  ו-  $Exp(1/2)$ , בהתאמה. מדליקים נורה מסוג A, וכאשר היא נשרפת מדליקים נורה מסוג B. נסמן ב-  $T$  את משך הזמן החל ברגע הדלקת הנורה הראשונה וכלה ברגע בו השניה נשרפת. מצא את:  $E(T)$ ,  $V(T)$ .

ב) כעת נניח כי מאירים חדר אחד באמצעות נורה מסוג A, וכאשר היא נשרפת מחליפים אותה בשתי נורות מסוג B במקביל. נסמן את הנורות מסוג B<sub>1</sub> וב-T<sup>\*\*</sup> את הזמן מתחילת הניסוי עד אשר B<sub>1</sub> נשרפת, וב-T<sup>\*</sup> את הזמן מתחילת הניסוי עד אשר B<sub>2</sub> נשרפת. (לדוגמא, אם הנורה הראשונה נשרפת לאחר שעה, B<sub>1</sub> נשרפת 6 שעות לאחר הדלקתה ו-B<sub>2</sub> 4 שעות לאחר הדלקתה, אז T<sup>\*</sup> = 7, T<sup>\*\*</sup> = 5) מצא:

ב.1)  $V(T^{**}), V(T^*)$

ב.2)  $COV(T^{**}, T^*)$  ו- $\rho(T^{**}, T^*)$

11.

מטילים זוג קוביות הוגנות פעמיים. יהי X מספר הפעמים בהן סכום התוצאות לפחות 10 בהטלה הראשונה של זוג הקוביות. יהי Y מספר הפעמים בהן סכום התוצאות לפחות 10 בשתי ההטלות. היאם:

ה.  $\rho(X, Y) = 0.5$

ו.  $P(X < Y) = 1/6$

ז.  $Y \sim U[0, 2]$

ח. X, Y בלתי תלויים.

ט.  $Y = aX + b$  עבור  $a > 0$ .

12. יהיו X, Y מ"מ בעלי צפיפות משותפת

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cxy, & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצא:

א) c

ב) האם X, Y בלתי תלויים?

ג)  $Cov(X, Y)$

ד)  $Cov(X - Y, X + Y)$

ה)  $V(X + Y)$

ו)  $P(X + Y \leq 1/3)$

ז) פונקציה צפיפות של X+Y

תרגול 11-12. (2014).

13. מ"מ מפולג אחיד על המשולש המתקבל על ידי הישרים  $y=1-x$ ,  $y=1+x$  וציר  $X$ .

א. פונקציית הצפיפות השולית של  $X$  ו- $Y$ .

ב. האם  $X, Y$  בלתי תלויים.

ג. חשב  $\rho(X, Y)$ .

14.

יהיו  $X$  ו- $Y$  משתנים מקריים בעלי פונקציית צפיפות משותפת:

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

(א) מצא את  $C$

(ב) נסמן במשתנה מקרי  $D$  את המרחק מן נקודה מקרית  $(X, Y)$  לראשית הצירים. חשב  $E(D)$