

תרגול 2 הסתברות בסיסית וקומבינטוריקה

1. כמה מילים באורך אפשר ליצור מהאותיות A,B,C,D,E, כך ש-E תופיע מספר זוגי של פעמים?
 2. מצא את הפונקציה היוצרת של הסדרה:
 $a_0=0, a_1=2, a_2=6, a_3=12, a_4=20, a_5=30, a_6=42, \dots$
 3. בעזרת פונקציה יוצרת הוכח:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$$

רמז: $(1+x)^{2n} = ((1+x)^n)^2$

4. בעזרת פונקציה יוצרת פתור את נוסחת הנסיגה:
 $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=2, n > 1, a_0=3, a_1=7$
 5. ע"י שימוש בפונקציה יוצרת, מצא את מספר האפשרויות לבחירת k איברים מתוך n, עם החזרה, כשאינן חשיבות לסדר.
 6. ע"י שימוש בפונקציה יוצרת פתור את המערכת משוואות:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases} \\ a_0 = 1, \quad b_0 = 0$$

7. מטילים קוביית משחק 10 פעמים. מצא את ההסתברויות הבאות: א) "4" לא מתקבל אף פעם. ב) "4" מתקבל בדיוק 4 פעמים. ג) "4" מתקבל לפחות פעם אחת. ד) ... לפחות פעמיים. ה) ... לכל היותר פעמיים.
 8. n אנשים עומדים בשורה, ביניהם איציק ושמוליק. מצא את ההסתברות שבין איציק ושמוליק יפרידו בדיוק k אנשים.
 9. מניחים k צריחים על לוח שחמט בגודל $n \times m$ ($k \leq m, n$). מצא את ההסתברות ככך ששום זוג צריחים אינם מאימים אחד על השני.

10. מוציאים באופן מקרי תת-קבוצה (אולי ריקה) מהקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$ לפי הכלל הבא: עבור כל איבר מטילים מטבע; אם "עץ" אז האיבר שייך לתת-קבוצה, אחרת-- לא. לאחר שהתת-קבוצה נבחרה בוחרים לפי אותו תהליך את התת-קבוצה השניה. מהי ההסתברות שהשתי התת-קבוצות זרות?
 11. מטילים קובייה הוגנת עד לקבלה הראשונה של תוצאה "4". מהי ההסתברות שזה יקרה: א) בהטלה ה-10 ב) לפני ההטלה ה-10 ג) אחרי ההטלה ה-10?

12. נתון כי $P(A)=P(B)=0.5$. הוכח כי $P(AB) = P(\overline{A} \overline{B})$

13. נתון אוסף של שני מאורעות A, B. $P(A)=\alpha, P(B)=\beta, P(A \cap B)=\gamma$. מצא את ההסתברויות הבאות: א) קורים בדיוק K מאורעות מהאוסף ($K=0,1,2$). ב) קורים לפחות K מאורעות מהאוסף ($K=0,1,2$). ג) קורים לכל היותר K מאורעות מהאוסף ($K=0,1,2$).
 14. ביד בת 5 קלפים, מתקבלת מחפסה טרופה היטב של 52 קלפים. מהי ההסתברות שיש לפחות קלף אחד מכל אחת מארבע צורות?
 15. 2n בני ו-2n בנות מחולקים באופן מקרי בין שתי כיתות שוות גודל. מצא את ההסתברות שבכל כיתה יהיה מספר שווה של בנים ובנות?