

תרגול 1 קומבינטוריקה

העקרון היסודי של הספירה:

נניח לפעולה ראשונה ישנן m דרכים שונות ולפעולה השנייה – k דרכים שונות. אזי מס' הדרכים לביצוע שתי הפעולות הינו $m \cdot k$.

1. במשרד השידוכים רשומים 20 בחורים ו 35 בחורות. שידוך מקרי הוא בחירה של בחור ובחורה. מהו מספר השידוכים האפשריים?
2. מטילים n קוביות שונות. מהו מספר התוצאות האפשריות?
3. מפזרים r כדורים שונים ב n תאים שונים. מהו מספר תוצאות האפשריות?

מספר התמורות של n איברים הינו $n!$. אם בוחרים k איברים מתוך n כאשר יש חשיבות לסדר הבחירה, הדבר נקרא תמורות. מספר התמורות של k איברים מתוך n הינו $\frac{n!}{(n-k)!}$.

כאשר אין חשיבות לסדר הבחירה הדבר נקרא צרוף של k איברים מתוך n , כאשר מספרם

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

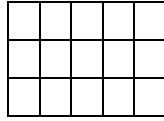
4. בכמה דרכים נוכל לבחור שלושה קלפים מחפיסה של 52 קלפים?
5. בכמה אופנים ניתן לבחור ועד בן 2 בנים ו 3 בנות מתוך קבוצה של 5 בנים ושבע בנות?
6. מפזרים r כדורים שונים ב n תאים שונים. מהו מספר התוצאות האפשריות אם אסור להכניס יותר מכדור אחד בכל תא?
7. מפזרים r כדורים זהים ב n תאים שונים. מהו מספר התוצאות האפשריות?
8. סימן של k דגלים הינו שורה של k דגלים המופיעים זה אחרי זה. כמה סימנים אפשריים של 8 דגלים ניתן ליצור אם יש 4 דגלים אדומים, 2 כחולים ו 2 לבנים?
9. על אבני דומינו מופיעים 2 מספרים. כמה קוביות דומינו שונות ניתן ליצור מהמספרים $1, 2, \dots, n$ אם לא ניתן להבחין בין 2 חלקי האבן?
10. בכמה אופנים שונים ניתן לסדר 5 ספרי מתמטיקה, 4 ספרי פיסיקה ו-3 כימיה על המדף, בו יש מקום ל-12 ספרים, אם ספרים מאותו תחום יעמדו זה ליד זה?
11. בכמה אופנים ניתן לבחור 5 קלפים מחפיסה של 52 קלפים, כך שיהיו 3 לב ו 2 מעויין?
12. במצולע משוכלל של n צלעות ($n > 5$) בוחרים באופן מקרי שני אלכסונים. מצא את מספר הדרכים לבכירה: (א) שני אלכסונים (ב) שני אלכסונים נחתכים?
13. בכמה דרכים אפשר להכניס n כדורים שונים ל- n קופסאות אם: (א) בדיוק קופסא אחד ריקה (ב) בדיוק שתי קופסאות ריקות?
14. בכמה דרכים ניתן להושיב n אנשים סביב שולחן עגול?
15. בכמה דרכים ניתן להושיב n נשים ו n גברים סביב שולחן עגול, כך שכל אשה תשב בין שני גברים?
16. בכמה דרכים ניתן להושיב 14 אנשים
א. 8 אנשים סביב שולחן עגול, והיתר על ספסל
ב. 8 אנשים סביב שולחן עגול, והיתר סביב שולחן עגול שני
17. בסל ישנן 10 פתקאות עליהן רשומות הספרות $0, 1, \dots, 9$. מהו מספר האפשרויות לקבלת מספר תלת-ספרתי בבחירה עם החזרה ובבחירה ללא החזרה?
18. הראה שמספר כל תתי-הקבוצות של הקבוצה בת n איברים הינו 2^n
19. הינו מספר הדרכים לבחור a איברים לקבוצה ראשונה ו b לקבוצה שנייה, מתוך קבוצה של

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{נאברים } (a+b \leq n). \text{ מצא עבור גודל זה אנאלוג לזהות:}$$

תרגול 1. הסתברות (2011).

$$20. \text{ הוכח: } \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$$

21. נתבונן בסריג הנקודות שבאיור B



A

אדם יוצא מנקודה A והולך על הסריג לנקודה B, כאשר בכל מהלך הוא יכול לבצע צעד אחד למלה או ימינה. כמה מסלולים שונים מ-A ל-B קיימים?

22. בעיית הבחירות: בבחירות בין שני מועמדים זכה מועמד א ב - m קולות ו מועמד ב ב - n קולות, כאשר $m \geq n$. מה הסתברות לכך שבתהליך מניית הקולות לא הוביל מועמד ב ב שום שלב?

23. מילה דיק היא מחרוזת ממספר זהה של X-ים ו Y-ים, כך ששום קטע באורך כלשהו מתחילת המחרוזת אינו מכיל יותר Y-י מאשר X-ים. לדוגמה מילות באורך 6:

XYXXYY
XXXYYY

כמה מילים דיק באורך $2n$ ישנם?

בהצלחה!