27.2.08

# אנליזה - תרגול 7

## גזירה נומרית, אינטגרציה נומרית

**שאלה 1:**

מצא נוסחא מעולה עבור $f''(x)$ המבוססת על ערכי $f$ ב-4 נק':

$x-5h,\ x+3h,\ x+h,\ x$

מהו סדר גודל השגיאה? ($f$ גזירה $\infty$ פעמים)

(בכיתה: $f''(x) = g\left(f(x+h), f(x), f(x-h), h\right)$ )

סביב $x$: $f(x-h) = f(x) + f'(x)(-h) + \frac{f''(x)(-h)^2}{2!} + \frac{f'''(x)(-h)^3}{3!} + O(h^4)$

סביב $x$: $f(x+h) =$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + f''(x)h^2 + O(h^4)$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = \frac{f(x-h) + 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + O(h^2)$$

משקלים:

נפתח עם הנק' שלנו:

$\beta$ סביב $x$: $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \frac{f'''(x)h^3}{3!} + O(h^4)$

$\gamma$ סביב $x$: $f(x+3h) = f(x) + f'(x)(3h) + \frac{f''(x)(3h)^2}{2!} + \frac{f'''(x)(3h)^3}{3!} + O(h^4)$

$\delta$ סביב $x$: $f(x-5h) = f(x) + f'(x)(-5h) + \frac{f''(x)(-5h)^2}{2!} + \frac{f'''(x)(-5h)^3}{3!} + O(h^4)$

נרצה לאפס:

III     II     I

נרצה למצוא קבועים $\delta, \gamma, \beta$ כך ש- $f'''(x)$ יתאפס ועוד נקבל את $f''$

כלו' - נרצה להעלים את $f'(x)$ $\Leftarrow$ ולהשאיר את $f''$

התנאים אם כך יהיו:

I $\quad \frac{\beta}{6} + \frac{27\gamma}{6} + \frac{-125\delta}{6} = 0$   יעלים את $f'''$

II $\quad \frac{\beta}{2} + \frac{9}{2}\gamma + \frac{25}{2}\delta = a$   ישאיר את $f''$

III $\quad \beta + 3\gamma + -5\delta = 0$   יעלים את $f'$

ואז $\alpha$ הוא המשקל של $f(x)$:

IV $\quad \alpha = -\beta - \gamma - \delta$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$

$$D = \alpha f(x) + \beta(f(x+h)) + \gamma(f(x+3h)) + \delta(f(x-5h)) = g(f''(x), h)$$

h נתון ו- $f''(x)$ היא מה שמחפשים.

נקבל את מטריצת המקדמים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & \frac{25}{2} & a \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{27}{6} & -\frac{125}{6} & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & \frac{a}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a}{30} \end{pmatrix}$$

נקח $a \neq 0$ , $a = 1$ : נקבל

$$\underbrace{\frac{2}{15} f(x) - \frac{1}{3} f(x+h) + \frac{1}{6} f(x+3h) + \frac{1}{30} f(x-5h)}_{D} + O(h^4) = f''(x) h^2$$

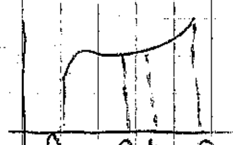
$$f''(x) = \frac{D}{h^2} + O(h^2)$$

שאלה שניה:

האינטגרל $\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$ מוערך בשיטת המלבן מוערך בשיטת המלבן עם חלוקה ל- m קטעים.

מצא m, קטן ככל שניתן, כך שהשגיאה תהיה קטנה מ- 0.001.

תזכורת: שטח מלבן $f(a)(b-a)$




השגיאה:

עבור קטע $E = \int_a^b f(x)\,dx - f(a)(b-a) =$

$$\int_a^b (f(x) - f(a))\,dx = \int_a^b \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\,da = \text{ע"פ משפט ערך הביניים האינטגרלי} =$$

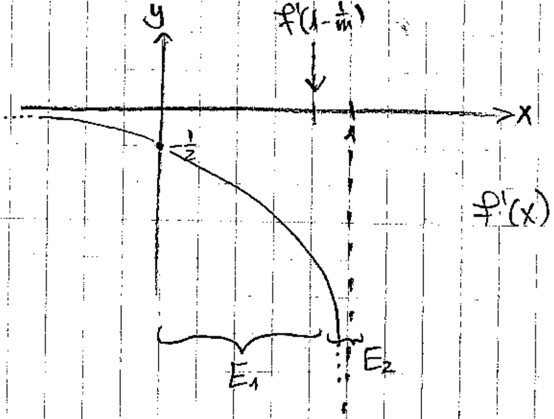
$$f'(\eta)\int_a^b (x-a)\,dx = f'(\eta)\frac{(b-a)^2}{2} \qquad \eta \in (a,b)$$

(*) $E_{Total} = \sum_{i=1}^{m} |E_{\text{של קטע}}| = \sum_1^m \left|\frac{h^2}{2} \cdot f'(\eta_i)\right| = \frac{h^2}{2}\sum_1^m f'(\eta_i)$ כי h אורך של קטע

ונבדוק מה קורה אם $f''$ (לא אפשר נרצה לקחת את ה- Sup

$f(x) = \sqrt{1-x}$

$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$



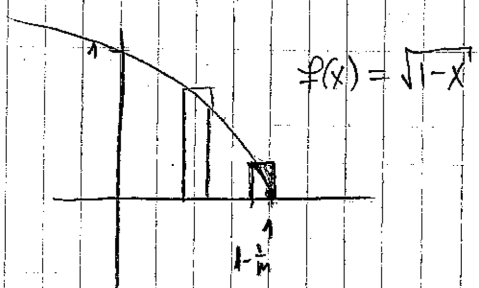

הנגזרת לא חסומה, אך היא לא חסומה רק במקטע האחרון.
לכן ניתן לחסום את הנגזרת עד המקטע האחרון, ואת המקטע האחרון
- נחשב את השגיאה שלו באופן ישיר.
נחשב את השגיאה ב- M-1 המקטעים האחרונים בנגזרת (*)
ואת השגיאה במקטע האחרון באופן ישיר. (נחלק ל-M מקטעים שווים: $h=\frac{1}{m}$)

$$E_1 = \frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{M-1}|f'(\eta_i)| \le \frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{M-1}|f'(1-\frac{1}{m})| =$$

$$\frac{1}{2m^2}(m-1)\left|\frac{-1}{2\sqrt{1-(1-\frac{1}{m})}}\right| = \frac{m-1}{2m^2}\cdot\frac{\sqrt{m}}{2} = \frac{(m-1)}{4m\sqrt{m}}$$

$E_2 =$

השגיאה בקטע האחרון:




$$f(1-\frac{1}{m})\cdot\frac{1}{m} > \int_{1-\frac{1}{m}}^{1} f(x)\,dx$$

ולכן

של המקטע האחרון $E_2 \le f(1-\frac{1}{m})\cdot\frac{1}{m} =$

$$\sqrt{1-(1-\frac{1}{m})}\cdot\frac{1}{m} = \sqrt{\frac{1}{m}}\cdot\frac{1}{m} = \frac{1}{m\sqrt{m}}$$

ולכן, נשים לב על הדרישה:

$$|E_1| + |E_2| < \frac{1}{1000}$$

הכל חיובי, נפטר מהערך המוחלט

$$\left|\frac{(m-1)}{4m\sqrt{m}}\right| + \left|\frac{1}{m\sqrt{m}}\right| < \frac{1}{m}$$

$$\frac{m-1+4}{4m\sqrt{m}} < \frac{1}{m}$$

$$\frac{m+3}{4m\sqrt{m}} < \frac{1}{m}$$

$$\frac{1+\frac{3}{m}}{\sqrt{m}} \le \frac{1}{250} \Longrightarrow$$

אם נבחר m שגדול יותר מ- $250^2$ אזי הוא יקיים את אי השוויון

$m = 62520$ מ.ש.ל

5.3.08

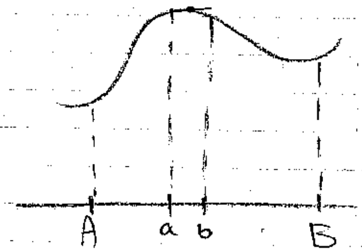
# אנליזה נומרית – תרגול מס' 8

## אינטגרציה נומרית

שאלה משנה:

התבונן באינטגרל $\int_0^1 e^{\sin x}dx$ . האינטגרל מוערך בשיטת המלבן עם חלוקה ל- m קטעים.

מצא m (קטן ככל הניתן) אשר עבורו השגיאה קטנה מ- 0.001.




$I = f(a)(b-a)$ של קטע $(a,b)$

$E = \int_a^b f(x)dx - f(a)(b-a)$ שגיאה של קטע

$$\Rightarrow |E_{total}| \le \frac{(B-A)^2}{2m}\cdot M$$

$$M = \sup_{[a,b]} (f'(x))$$ בקטע

$$f(x) = e^{\sin x}$$

$$f'(x) = e^{\sin x}\cdot \cos x$$

כיוון שהפונ' $f'(x)$ רציפה ואין לה נק' התבדרות אז היא חסומה

ע"י $|f'(x_0)|$ כאשר $x_0 = 0, 1, x_k \to$ נק' קיצון

נמצא את נק' הקיצון של $f'(x)$:

$$f''(x) = e^{\sin x}\cos^2 x + e^{\sin x}(-\sin x) = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x) = 0$$

יקרה רק כאשר

$$\cos^2 x - \sin x = 0$$

$$1 - \sin^2 x - \sin x = 0 \qquad \sin x = A$$

$$-A^2 - A + 1 = 0 \qquad A_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt5}{2}$$

קיבלנו $x_0$: $\sin x_0 = \frac{-1+\sqrt5}{2} > 0$

$x_1$: $\sin x_1 = \frac{-1-\sqrt5}{2} < 0$ ← לא בתחום כי $\sin x$ בין $0<x<1$


תמיד חיובי.

נבדוק כי השניה גם בתחום: $\sin(x_0) = 0.61 < \sin 1 \approx 0.86$

ולכן $x_0$ נק' קיצון יחידה בתחום.

נבדוק הקצוות:

$$f'(0) = e^{\sin 0}\cdot\cos 0 = 1$$

$$f'(1) = e^{\sin 1}\cdot\cos 1 \approx 1.25$$

$$f'(x_0) = e^{\sin x_0}\cdot\cos x_0 = e^{\frac{\sqrt5-1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt5-1}{2}} \simeq 1.46$$

$$\left(\cos x_0 = \sqrt{\sin x_0} = \sqrt{\frac{\sqrt5-1}{2}}\right)$$

$$M = \sup_{x\in[0,1]} (f'(x)) = 1.46$$

$$|E_{TOTAL}| \le \frac{(B-A)^2}{2m}\cdot M = \frac{1}{2m}\cdot 1.46 < \frac{1}{1000}$$

דרישה השאלה

$$\frac{0.73}{m} < \frac{1}{1000} \Rightarrow m \ge 730$$

שאלה שניה:

יהי $I$ האינטגרל $\int_A^B f(x)dx$ המחושב ע"י כלל המלבן.

בהנחה ש- $f'$ ידועה חסומה, הוצעה שיטת הקירוב הבאה:

$$J_1 = J + \frac{h^2}{2}\cdot\sum_{i=1}^{m} f'\left(A+\left(i-\tfrac12\right)h\right) \qquad (h \text{ אורך כל מקטע})$$

חסום את השגיאה ($f'$ גזירה ו- $f''$ חסומה)

$$|E_{TOTAL}| \le \sum_{i=1}^{m} |E_i|$$

נמצא את $E_i$ - השגיאה במקטע ה-$i$:

$(a,b)$ במקטע $J_1 = f(a)(b-a) + \frac{h^2}{2}\cdot f'(\underbrace{A+(i-\tfrac12)h}_{\text{אמצע המקטע ה-}i}) =$

$$= f(a)(b-a) + \frac{h^2}{2}\cdot f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)$$

$(a,b)$ של מקטע $E = \underbrace{\int_a^b f(x)dx - f(a)(b-a)}_{\eta\in(a,b)\quad f'(\eta)\frac{(b-a)^2}{2}} - \frac{h^2}{2} f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)$

$$\eta\in(a,b)\quad f'(\eta)\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{h^2}{2}f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \qquad (b-a)=h$$

$$= \frac{h^2}{2}\left(f'(\eta) - f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right)$$

נכפיל ונחלק ב- $\eta - \frac{a+b}{2}$

$$= \frac{h^2}{2}\,\frac{f'(\eta) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\eta - \frac{a+b}{2}}\left(\eta - \frac{a+b}{2}\right) =$$

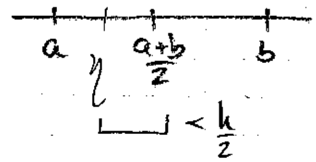
לפי משפט ע.הביניים של לגרנז'

$$= \frac{h^2}{2} f''(\eta')\left(\eta - \frac{a+b}{2}\right) \qquad \eta' \in \left(\xi, \tfrac{a+b}{2}\right)$$

משפט ע.הביניים של לגרנז':

אם $f$ רציפה וגזירה אזי $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ $\quad c \in [a,b]$

$$|E| = \frac{h^2}{2} f''(\eta')\left(\eta - \frac{a+b}{2}\right)$$




$$\Rightarrow |E| \le \frac{h^2}{2} f''(\eta') \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow |E| \le \frac{h^3}{4} f''(\eta')$$

$$\Rightarrow |E_{TOTAL}| \le \sum_{i=1}^{m} |E_i| \qquad M = \sup_{x\in[A,B]} f''(x)$$

$$|E_{TOTAL}| \le \frac{h^3}{4}\sum_{i=1}^{m} M = \frac{h^3}{4}\cdot mM \qquad m = \frac{B-A}{h}$$

$$= \frac{h^3}{4}\cdot\frac{(B-A)}{h}\cdot M = \frac{(B-A)M}{4}\cdot h^2 = O(h^2)$$

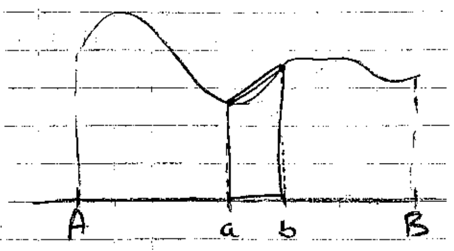
$$|E_{TOTAL}| \le O(h^2)$$

שאלה שני' ש— :

הוכח כי קירוב עם שיטת הטרפז נותן שגיאה מסדר גודל $O(h^2)$

(שיטת המלבן - $O(h)$)

של מקטע $I = \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)(b-a)$




של מקטע $E_i = \int_a^b f(x) - \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)(b-a)$

המטרה שלנו היא לחסום את $E_i$ ע"י $c \cdot h^3$

$$E_i = \int_a^b \left(f(x) - \frac{f(a)}{2} - \frac{f(b)}{2}\right) dx$$

הוספנו פנימה אינטגרל של קבוע מ-$a$ עד $b$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b 2f(x) - f(a) - f(b)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b f(x) - f(a)\, dx + \frac{1}{2}\int_a^b f(x) - f(b)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot f'(\eta)\frac{(b-a)^2}{2} + (*) \ominus$$

$$(*) = \left[ \int_a^b f(x) - f(b)\, dx = \int_a^b \underbrace{\frac{f(x)-f(b)}{x-b}}_{f(x)} \underbrace{(x-b)}_{g(x)}\, dx = \right.$$

ממשפט ע' הביניים האינטגרלי

$$\int f(x) g(x)\, dx = f'(\eta)\int g(x)$$

רציפה ואינטגרבילי — אי חיובי או אי שלילי —

$$\left. = f'(\eta)\int_a^b (x-b)\, dx = f'(\eta)\left.\frac{(x-b)^2}{2}\right|_a^b = -f'(\eta)\frac{(b-a)^2}{2} \right]$$

$$\ominus\ \frac{1}{2}f'(\eta_1)\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{2}f'(\eta_2) =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{2}\left(f'(\eta_1) - f'(\eta_2)\right) = \frac{h^2}{4}\left(\frac{f'(\eta_1)-f'(\eta_2)}{\eta_1-\eta_2}(\eta_1-\eta_2)\right) =$$ ממשפט ע' הביניים

$$= \frac{h^2}{4}\cdot f''(\eta_3)\underbrace{(\eta_1-\eta_2)}_{<h} \qquad \eta_3 \in (\eta_1, \eta_2)$$

$$|E_i| \le \frac{h^2}{4}\cdot f''(\eta_3)\cdot h$$

יהי $M = \sup_{x \in [A,B]} f''(x)$

12.3.08

# אנליזה נומרית - תרגול 9

## אינטגרציה נומרית

אינטגרציה גאוס: מחפשים נוסחאת קירוב:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2) + \dots + \omega_k f(x_k) + E$$

$x_i$ נק' החלוקה, $w_i$ קבועים.

יש כאן $2k$ נעלמים.

נדרוש כי $E=0$ עבור פולינומים מדרגה $\leq 2k-1$.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2k-1} a_i x^i$$

ונקבל $2k$ משוואות

$$\int_{-1}^{1} x^i = \omega_1 x^i + \omega_2 x^i + \dots + \omega_k x^i \qquad 0 \leq i \leq 2k-1$$

פתרון המש' לא קצר ומעייף.

לכן נחשב נק' חלוקה $x_i$ בדרך אחרת:

נסתכל על הפולינום כעל וקטור הנפרש ע"י $1, x, x^2, x^3, \dots x^k$

ונגדיר למרחב זה מכפלה פנימית

$$<f(x), g(x)> = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

לפולינום שורשים בדיוק ב-$k$ נק' החלוקה $P(x) = (x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_k)$

אזי המכפלה של $P(x)$ עם $Q(x)$ מדרגה $< k$

$$\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx = \underbrace{\omega_1 f(x_1)\underset{\text{שורש}}{p(x_1)} + \dots + \omega_k f(x_k)\underset{\text{שורש}}{p(x_k)}}_{0} + \underbrace{E}_{=0} = 0$$

לפי דרישה כי $E=0$ עבור פול' מדרגה $< 2k-1$.

מש זו, קה $P(x)$ ניצב לכל וקטור $Q(x)$ שקולה לדרישה כי השגיאה

הינה אפס עבור פולינומים $Q(x)$ מדרגה $\leq 2k-1$

לכן $P(x)$ הוא חלק מבסיס אורתוגונלי ולכן יש למצוא בסיס כזה ע"י

תהליך גרם-שמידט. עבור מכפלה פנימית זו, הבסיס האורתוגונלי

שאלה ג:

מחפשים נוסחת קירוב מהטיפוס

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = w_1 f(-1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_k f(x_k)$$

אשר תהיה מדויקת לכל הפולינומים ממעלה גבוהה ככל שניתן,

(א) הסבר עבור פולינומים של איזו מעלה ניתן לצפות למצוא נוסחה כ"ז מדויקת לגמרי.

- כאן יש לנו דרגות חופש, ולכן ניתן להציב 2k-1 משוואות:

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = w_1 + w_2 + \dots + w_k$$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = w_1(-1) + w_2 x_2 + \dots + w_k x_k$$

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = w_1(-1)^2 + w_2 x_2^2 + \dots + w_k x_k^2$$

$$\int_{-1}^{1} x^{2k-2} = w_1(-1)^{2k-2} + w_2 x_2^{2k-2} + \dots + w_k x_k^{2k-2}$$

(ב) ולכן ניתן למצוא נוס' מדויקת לגמרי עד דרגה $2k-2$.

מצא $w_1, w_2, x_2$ עבור משקל הנוסחא המתאימה בו $k=2$:

$$\left.\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} 1\,dx &= w_1 + w_2 &&= 2\\
\int_{-1}^{1} x\,dx &= w_1(-1) + w_2 x_2 &&= 0\\
\int_{-1}^{1} x^2\,dx &= w_1(-1)^2 + w_2 x_2^2 &&= \tfrac{2}{3}
\end{aligned}\right\}
\quad
\begin{aligned}
w_1 &= 1/2\\
w_2 &= 2/3\\
x_2 &= 1/3
\end{aligned}$$

(ג) עבור $k$ מסוים, כלשהו, נסמן $\varphi(x) = (x-x_2)(x-x_3)\cdot\dots\cdot(x-x_k)$

הגדר מכפלה פנימית מתאימה על מרחב הפולינומים והסבר כיצד מאפשרת למצוא את $\varphi$.

- נחפש מכפלה פנימית אשר בה יקיים תנאי ניצבות כאשר נדרוש כי השגיאה תהיה אפס.

אם $Q(x) \overset{\text{מדרגה}}{\le} k-2$ אז $P(x)Q(x) \overset{\text{מדרגה}}{\le} 2k-3$ ומכאן:

$$\langle q(x), p(x)\rangle \int_{-1}^{1} \underbrace{P(x)Q(x)}_{\cdot(x+1)}\,dx = w_1 \underbrace{P(-1)Q(-1)}_{(-1+1)} + w_2 \underbrace{P(x_2)Q(x_k)}_{\cdot(x_2+1)} + \dots + w_k \underbrace{P(x_k)Q(x_k)}_{(x_k+1)} + E$$

נוכיח כי זו מכפלה פנימית:

לינארית ✓

סימטרית ✓

חיובית: $\langle u,v \rangle \geq 0$

נובע מכך ש- $\langle f(x), f(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f^2(x)(x+1)\,dx > 0$

כיוון ש- $(x+1)$ חיובי תמיד בתחום $[-1,1]$

שאלה 2:

נניח כי מחפשים נוסחת קירוב מהצורה

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_k f(x_k)$$

אשר תהיה מדויקת עבור פונק' מהמרחב הלינארי הנפרש ע"י: $1, e^x, e^{2x}, \dots, e^{(2k-1)x}$

(א) רשום מע' משוואות אשר פתרון יתן את הפרמטרים המבוקשים

$f$ היא מהצורה: $f(x) = \sum_{i=0}^{2k-1} a_i e^{ix}$

בגלל $2k$ נע"מ ולכן יש $2k$ משוואות:

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = w_1 + w_2 + \dots + w_k$$

$$\int_{-1}^{1} e^x\,dx = w_1 e^{x_1} + w_2 e^{x_2} + \dots + w_k e^{x_k} = e - \frac{1}{e}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx = w_1 e^{2x_1} +$$

$$\vdots$$

$$\int_{-1}^{1} e^{(2k-1)x}\,dx = w_1 e^{(2k-1)x_1} + w_2 e^{(2k-1)x_2} + \dots + w_k e^{(2k-1)x_2} =$$

19.3.08

# אנליזה נומרית - תרגול מס' 10

## אינטרפולציה

משפט קיום (ויחידות):

בהנתן $m+1$ נק' שונות, $x_0,\dots,x_m$, וערכי הפונקציה $f(x)$ בנקודות $f(x_0),\dots,f(x_m)$ אז קיים פולינום יחיד ממעלה $\leq m$ המקיים $p(x_i)=f(x_i)$

---

יש שתי שיטות למצוא אותו. לגרנג' וניוטון.

שיטת ניוטון למציאת פולינום האינטרפולציה:

אם נתונה נק' דגימה אחת: $x_0$: אז $p(x)=f(x_0)$ פולינום האינטרפולציה

נבנה בצורה רקורסיבית את פולינום האינטרפולציה עבור שאר הנק':

אם ידוע מהו פולינום האינטרפולציה עבור $x_0,\dots,x_{m-1}$ נק' הדגימה.

אז נמצא מהו פולינום האינט' עבור $x_0,\dots,x_m$ נק' הדגימה.

נסמן:

$P_{n-1}(x)$ המקיים $P_{n-1}(x_i)=f(x_i)$ עבור $x_0,\dots,x_{m-1}$

אז $P_m(x)=P_{m-1}(x)+Q(x)$

כאשר $Q(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{m-1})\cdot C_m$

כדי למצוא את $C_m$: נדרוש $P_m(x_m)=f(x_m)$ ונקבל

$$f(x_m)=P_{m-1}(x_m)+(x_m-x_0)(x_m-x_1)\cdots(x_m-x_{m-1})\cdot C_m$$

ונקבל
$$C_m=\frac{f(x_m)-P(x_{m-1})(x_m)}{(x_m-x_0)\cdots(x_m-x_{m-1})}$$

---

שאלה ראשונה:

נתון כי הנק' $f(x_0),\dots,f(x_n)$ נחות על קו ישר.

הוכח כי פולינום האינטרפולציה הינו פולינום לינארי (מבלי להשתמש במשפט הקיום והיחידות)

פתרון: (עם שימוש במשפט)

(*)

מכיוון שהנק' $x_i$ מקיימות $f(x_i)=Af(x_i)+B$ אז הפולינום $p(x)=Ax+b$ יהיה פולינום האינטרפולציה, המקיים $p(x_i)=f(x_i)$

פתרון (ללא שימוש בנוסחה)

נוכיח באינדוקציה על מס' הנק' m:

עבור 2 נק' $x_0, x_1$ פולינום האינטרפולציה הוא: $P(x)=Cx+D$ ⊛⊛

מכיוון שגם הקו הישר ⊛ וגם הקו הישר ⊛⊛ כוכביים — עוברים

דרך $x_0, x_1$ אזי מכיוון שדרך 2 נק' עובר רק קו ישר אחד, מקבל

כי הקווים שווים ולכן $C=D$, $A=B$.

צעד:

בהנחה כי $P(x)=Ax+B$ הוא פולינום האינטרפולציה עבור הנק' $x_0,\dots,x_{m-1}$

אזי נראה כי הוא גם הפולינום עבור $x_0,\dots,x_m$.

$$P_m(x)=P_{m-1}(x)+\frac{\overbrace{f(x_m)}^{\text{עפ הנתון } Ax_m+B}-\overbrace{P_{m-1}(x_m)}^{\text{עפ הנחת האינדוקציה } Ax_m+B}}{(x_m-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_m-x_{m-1})}\cdot(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)=0$$

שאלה שניה:

תהי $(x_m)_{m=0}^{\infty}$ סדרת נק' שונות ב-$\mathbb{R}$.

תהי פונק' $f(x)=e^x\cos x$

$P_m$ הוא פולינום האינטרפולציה של $f$ ממעלה קטנה/שווה ל-m

המזדהה עם הפונק' בנק' $x_0,\dots,x_m$

(א) הראה כי לא בהכרח קיים $\lim_{m\to\infty} P_m(x)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$

אם נבחר את סדרת הנק' $x_m=\frac{\pi}{2}+m\pi$ אזי $f(x_m)=e^{x_m}\cos(x_m)=0$

מכיוון ש- $P(x)=0$ הוא הפולינום המקיים $P(x_i)=f(x_i)$ אזי ממשפט

הקיום והיחידות הוא פולינום האינטרפ',

אולם, עבור כל $x\neq x_m$, $f(x)\neq 0$. ולכן, ללא תלות במס' נק' הדגימה,

כל עוד הן נבחרות מתוך הנ"ל, תהיה שגיאה עבור $x\neq x_m$.

(ב) הראה כי אם $(x_m)_{m=0}^{\infty}$ סדרה חסומה אזי $P_m(x)\xrightarrow[m\to\infty]{} f_m(x)$

במידה שווה על כל קטע סופי.

פתרון:

נרצה להראות כי $\lim_{m\to\infty} E_m = 0$

$$|E| = \left|\frac{(x-x_0)\cdot \ldots \cdot(x-x_m)}{(m+1)!}\right|\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq \left|\frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!}\right|\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq$$

$$f(x) = e^x\cos x$$
$$f'(x) = e^x(-\sin x) + e^x\cos x$$
$$\vdots$$
$$f^{k}(x) = a_k e^x\cos x + b_k e^x \sin x$$

נשער כי

נוכיח זאת באינדוקציה:

$k=0$ $\quad a_k=1 \,,\, b_k=0$ $\quad$ (נכון $f(x)$)

נניח כי נכון לk:

$$f^{k}(x) = a_k e^x\cos x + b_k e^x\sin x$$

אזי

$$f^{k+1}(x) = a_k(e^x\cos x + e^x(-\sin x)) + b_k(e^x\sin x + e^x\cos x) =$$
$$(a_k+b_k)e^x\cos x + (-a_k+b_k)e^x\sin x$$

ולכן

$$a_{k+1} = a_k + b_k$$
$$b_{k+1} = -a_k + b_k$$

מ.ש.ל

נרצה לחסום את $f^{(n+1)}(c)$

$$|f^{(n+1)}(x)| = |a_{k+1}e^x\cos x + b_{k+1}e^x\sin x| \leq |e^b||a_{k+1}\cos x + b_{k+1}\sin x|$$
$$\underset{\text{א"ש משלש}}{\leq} |e^b|\left[|a_{k+1}\cos x| + |b_{k+1}\sin x|\right] \leq$$
$$|e^b|\cdot|1|\cdot(a_{k+1}+b_{k+1}) \leq$$

$$|a_{k+1}| + |b_{k+1}| = |a_k+b_k| + |-a_k+b_k| \underset{\text{א.ש.ה משלש}}{\leq} |a_k|+|b_k|+|-a_k|+|b_k| = 2(|a_k|+|b_k|)$$

ולכן

$$|a_{k+1}|+|b_{k+1}| \leq \ldots \leq \underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}_{k+1 \text{ פעמים}}(|a_0|+|b_0|)$$

$$\leq |e^b||2^{k+1}|$$

$$\leq \quad 2^{n+1}$$

למה? כי

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{1}{m!}} \leq \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{\beta^m}{m!}} \leq \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{\beta^m}{(\beta+1)^m}}$$

לפי משפט הסנדוויץ'.

כי ניתן להוכיח כי

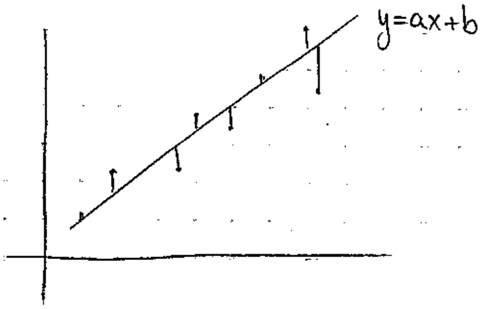
$$m! = m\cdot(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot 1 \geq \underbrace{(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\beta+1)}_{m \text{ פעמים}}$$

עבור $m$ גדול מספיק.

26.3.08

# אנליזה - תרגול 11

## ישר הריבועים הפחותים




נתונות m נק' $(x_i,y_i)$
מחפשים קו ישר שהוא כזה ש
השגיאה (שנגדיר) יהיה מינימלי

נגדיר השגיאה $E = \sum_{i=1}^{m} (y_i - (ax_i+b))^2 = D(a,b)$

ונחפש $a,b$ שיתנו $E$ מינ.

נכתוב את $D(a,b)$ בצורה שונה (ע"י שימוש בממוצעים)

$$D(a,b) = \sum_{i=1}^{m} (y_i^2 - 2y_i a x_i$$

$$D(a,b) = m\left(\overline{y^2} - 2a\overline{yx} - 2b\bar{y} + a^2\overline{x^2} + 2ab\bar{x} + b^2\right)$$

$$\frac{\partial D}{\partial a} = -2\overline{xy} - 2a\overline{x^2} + 2b\bar{x} = 0$$

$$(*)\ \frac{\partial D}{\partial b} = -2\bar{y} + 2a\bar{x} + 2b = 0$$

ונמצא $a = \dots$
ביטויים מפורשים $b = \dots$

### שאלה 1:

נתונות m נק' $(x_m,y_m) \dots (x_1,y_1)$ וידוע כי ישר הריבועים הפחותים המתאים להן הוא $y=-2x+5$. מוסיפים עוד נק' $(x_{m+1},y_{m+1})$.
מצא והוכח תנאי מספיק והכרחי על הנק' $(x_{m+1},y_{m+1})$ כך שישר הריבועים הפחותים של $m+1$ הנק' הינו $y=-2x+5$

פתרון:

נחפש תנאי הכרחי:

מניחים כי הישר עבור $m+1$ הנק' הוא ישר $y=\overset{a}{-2}x+\overset{b}{5}$, כלומר ונבדוק איזה אילוץ נדרש מההכרח על הנק' שהתווספה $(x_{m+1},y_{m+1})$:

$$D_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} (y_i - (ax_i+b))^2$$

$$D_{m+1} = D_m + (y_{m+1} - (ax_{m+1}+b))^2$$

מכיוון ש- $(-2,5)$ היא נק' המינ' של $D_{m+1}$:

$$\frac{\partial D_{m+1}}{\partial a}\Big|_{(-2,5)} = 0 = \underbrace{\frac{\partial D_m}{\partial a}\Big|_{(-2,5)}}_{0} + \frac{\partial}{\partial a}\left(y_{m+1}-(ax_{m+1}+b)\right)^2\Big|_{(-2,5)}$$

כי נתון ש $(-2,5)$ מינ' כבר עבור m הנק'

ולכן

$$2(y_{m+1}-ax_{m+1}-b)(-x_{m+1})\Big|_{(-2,5)} = 0$$

נציב ונקבל: <u>התנאי:</u> $2(y_{m+1}+2x_{m+1}-5)(-x_{m+1}) = 0$

דרישה שניה: באותו אופן

$$\frac{\partial D_{m+1}}{\partial b}\Big|_{(-2,5)} = 0 = 0 + \frac{\partial}{\partial b}\left(y_{m+1}-(ax_{m+1}+b)\right)^2$$

$$2(y_{m+1}-ax_{m+1}-b)(-1)\Big|_{(-2,5)} = 0$$

ונקבל <u>תנאי שני:</u> $-2(y_{m+1}+2x_{m+1}-5) = 0$

לכן התנאי ההכרחי על $(x_{m+1}, y_{m+1})$ הוא $y_{m+1}+2x_{m+1}-5=0$

כלומר $(x_{m+1}, y_{m+1})$ על הישר.

כעת נראה שזהו תנאי מספיק:

נניח כי התנאי על $(x_{m+1}, y_{m+1})$ הינו $y_{m+1}=-2x_{m+1}+5$

ונוכיח כי הישר המתקבל עבור m+1 הנק' הינו $y=-2x+5$

- נשים לב כי $D_{m+1}(a,b) \geq D_m(a,b)$

$D_{m+1}(-2,5) = D_m(-2,5) \leq D_m(a,b) \leq D_{m+1}(a,b)$ כי $0=\left(y_{m+1}-\overbrace{(-2x_{m+1}+5)}^{y_{m+1}}\right)^2$

כלומר $D_{m+1}(-2,5) \leq D_{m+1}(a,b)$

כלומר $(-2,5)$ נק' מינ' ג' עבור m+1 נק'

ולכן $y=-2x+5$ הינו הישר גם עבור m+1 הנק'.

שאלה II :

נתונות m דגימות שניתן ליחס אותן לפונק' $f(x) = ax\cdot e^{-bx}$

הסבר כיצד ניתן להשתמש בישר הריבועים הפחותים ע"מ למצוא

(להעריך) את הפרמטרים a ו- b.

פתרון:

ניתן להניח כי $y_i = a x_i \cdot e^{-bx_i}$ , נפעיל ln ונקבל

$$\ln y_i = \ln a + \ln x_i - bx_i$$

נרצה להגדיר סט חדש של דגימות מתוך הדגימות שלנו

$$\underbrace{\ln y_i - \ln x_i}_{Y_i} = \overset{B}{\ln a} + \overset{A}{b}\underbrace{x_i}_{X_i}$$

וזה יהיה הסט החדש

כעת נחפש את ישר הריבועים הפחותים עבור $(Y_i, X_i)$

נמצא את A ו- B ונציב:

$$a = e^B$$

$$b = -A$$