בעיה נוספת לתרגול מס' 9, אינטגרציה גאוסית:

נניח כי מחפשים נוסחאות קירוב מהסוג:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx w_1\cdot f(x_1)+\dots+w_k\cdot f(x_k)$$

אשר תהיה מדויקת עבור פונקציות f במרחב הלינארי הנפרש ע"י הפונקציות $1, e^x, e^{2x}, \dots, e^{(2k-1)x}$.

(א) רשום מערכת משוואות אשר פתרונה יתן את הפרמטרים המבוקשים: $w_1, w_2, \dots, w_k, x_1, x_2, \dots, x_k$ (אין צורך לפתור את המערכת).

<u>פתרון:</u> כדי שקירוב האינטגרל, התנאי הדרוש יתקיים אמ"מ הוא יתקיים עבור הפונקציות הפורשות $1, e^x, e^{2x}, \dots, e^{(2k-1)x}$. לכן:

$$\int_0^1 1\,dx = 1 = w_1+w_2+\dots+w_k$$

$$\int_0^1 e^x dx = e-1 = w_1e^{x_1}+w_2e^{x_2}+\dots+w_ke^{x_k}$$

$$\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{e^2-1}{2} = w_1e^{2x_1}+w_2e^{2x_2}+\dots+w_ke^{2x_k}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^1 e^{(2k-1)x}dx = \frac{e^{2k-1}-1}{2k-1} = w_1\cdot e^{(2k-1)x_1}+w_2\cdot e^{(2k-1)x_2}+\dots+w_ke^{(2k-1)x_k}$$

(ב) מצא פונקציה התלויה בפרמטרים $x_1, x_2, \dots, x_k$, אך לא ב- $w_1, w_2, \dots, w_k$? המקיימת תנאי ניצבות מה"ם המאפשר שקרונה לרשום מערכת משוואות עבור נקודות החלוקה $x_1, x_2, \dots x_k$ (בהם לא מופיעות המשקלות $w_1 \dots w_k$).

<u>פתרון:</u> נתבונן במכפלה הסקלרית על מרחב הפונקציות הרציפות על $[0,1]$ המוגדרת ע"י: $f,g\in C[0,1]$, $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

יהי [illegible]:

$$f(x) = (e^x-e^{x_1})(e^x-e^{x_2})\dots(e^x-e^{x_k})$$

אם נדרוש כי השגיאה תהיה אפס עבור פונקציה הנפרשת ע"י $1, e^x, e^{2x}, \dots, e^{(2k-1)x}$

אזי הדבר יהיה שקול לדרישה כי $f(x)$ יהיה ניצב ל $g(x)$

במרחב מכפלה פנימית זה, כאשר $g(x)$ היא קומבינציה לינארית של $1, e^x, \dots, e^{(k-1)x}$.

מכיוון ש $f \cdot g$ נפרש ע"י $1, e^x, e^{2x}, \dots, e^{(2k-1)x}$

ולכן $$\int_0^1 f(x) g(x) = w_1 \cdot f(x_1) \cdot g(x_1) + \dots + w_k \cdot f(x_k) \cdot g(x_k) = 0$$

כך, באופן עקרוני: נקבל מערכת משוואות עבור נקודות הקוודרטורה $x_1, x_2, \dots x_k$ בהן יש מוצא המשקלים $w_1, \dots, w_k$:

$$\int_0^1 f(x) \cdot 1 = 0$$

$$\int_0^1 f(x) \cdot e^x = 0$$

$$\vdots$$

$$\int_0^1 f(x) \cdot e^{(k-1)x} = 0$$

כמו כן, ניתן באופן עקרוני למצוא את $f(x)$ עבור כל k באמצעות תהליך גרהם-שמידט.

(5) השתמש בחלק הקודם למציאת מערכת משוואות עבור נקודות הקוודרטורה במקרה הבא (ללא פתרון את המשוואות).

<u>פתרון:</u> הניצבים עבור הפונקציות $1, e^x$ נותנים:

$$\int_0^1 (e^x - e^{x_1})(e^x - e^{x_2}) \cdot 1 \, dx = 0$$

$$\int_0^1 (e^x - e^{x_1})(e^x - e^{x_2}) e^x \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^2-1}{2} - \frac{(e-1)}{2}(e^{x_1} + e^{x_2}) + e^{x_1} e^{x_2} = 0$$

$$\frac{e^3-1}{3} - \frac{e^2-1}{2}(e^{x_1} + e^{x_2}) + (e-1) e^{x_1} e^{x_2} = 0$$