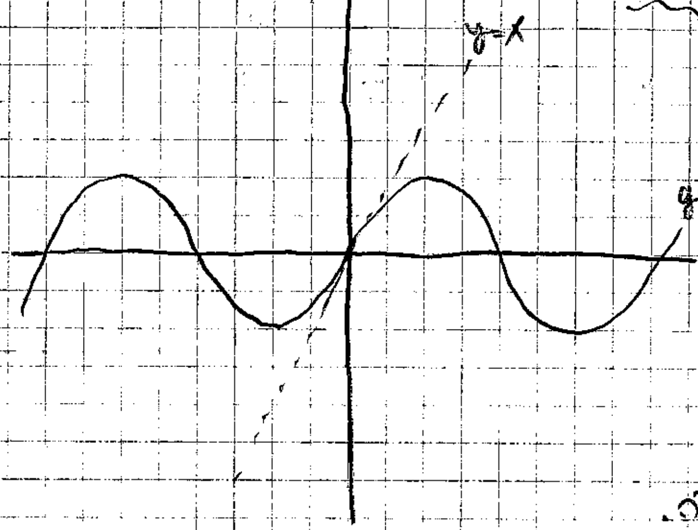
פתרון שאלה (1א) סעיף ב:

נתונה הפונקציה $g(x)=\sin(x)$:



ראשית, נשים לב לנקודת שבת ב $x=0$, שכן $\sin(0)=0$.

כעת נראה שזו נקודת השבת היחידה.

נעזר בלמה $|\sin(x)|<|x|$ עבור $x\neq 0$ בכדי להראות כי עבור $x>0$ הגרף $y=x$ נמצא תמיד מעל $g(x)$ ועבור $x<0$ הגרף $y=x$ נמצא מתחת ל $g(x)$. לכן, $x=0$ הינה נקודת השבת היחידה.

כעת נבדוק אלו נקודות התחלה מאפשרות להתכנסות לנקודת שבת זו.

כיוון ש $-1\le \sin x\le 1$, אזי האיטרציה הראשונה תוביל בהכרח לתחום זה. כלומר $|x_1|\le 1$ עבור כל נקודת התחלה x_0 ב $\mathbb{R}$.

נניח למשל כי $x_1>0$. אזי $x_2=\sin(x_1)$ ולכן, עפ"י הלמה, $0<x_2<x_1$.

באינדוקציה, רואים כי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה חיובית יורדת במקרה זה ולכן x_n בכל איטרציה מתקרבת יותר לנקודת השבת $(|e_{n+1}|=|\sin(x_n)-0|<|x_n-0|=|e_n|)$.

באותו האופן, אם $x_1<0$, אזי הסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה שלילית עולה ומתכנסת גם כן לנקודת השבת. אם $x=0$ אזי כל איברי הסדרה מתאפסים.

מכאן, שעבור כל נקודת התחלה ב $\mathbb{R}$ הסדרה מתכנסת לנקודת השבת היחידה $x=0$.

כעת נבחן את קצב ההתכנסות. נשים לב כי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|\sin(x_n)|}{|x_n|} = \lim_{x_n\to 0}\frac{|\sin(x_n)|}{|x_n|} \to 1$$

זאת כי ראינו כבר כי $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

לא ניתן לקבוע כי ההתכנסות היא לינארית, כיוון שעבור התכנסות לינארית נדרש קבוע $A<1$. למעשה, מהגבול שמצאנו ניתן להסיק כי ככל שאנו מתקרבים לשורש קצב האיטרציה הינו קטן יותר. זוהי התכנסות איטית בהרבה מההתכנסות

לינארית בה השגיאה קטנה בכל איטרציה ביחס החסום
ע"י קבוע קטן [illegible].