

אנליזה לחשמל

תרגול מס' 6 – מערכות אורתונורמליות אינסופיות

V מרחב מכפלה פנימית.

משפט: תהי $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית במרחב מכפלה פנימית V ויהי $u \in V$. הטענות הבאות שקולות:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, e_i \rangle|^2 = \|u\|^2 \quad (1)$$

(כלומר מתקיים שוויון באי-שוויון בסל, שוויון זה נקרא שוויון פרסבל).

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, e_i \rangle e_i \quad (2)$$

$$u \in \overline{\text{span}\{e_i\}_{i=1}^{\infty}} \quad (3)$$

במקרה שהתנאים השקולים של המשפט האחרון מתקיימים לכל $u \in V$, המערכת האורתונורמלית $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ נקראת סגורה.

משפט: כל פונקציה $f \in L^2_{PC}[a, b]$ ניתן לקרב בנורמה (ואף במידה שווה) ע"י פונקציה קבועה למקוטעין על $[a, b]$

תרגיל (בוחן 2 – 2008)

תהי $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית ב- $V = L^2_{PC}[0, 1]$ כך שלכל $a \in [0, 1]$ מתקיים:

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_0^a \varphi_i(x) \right|^2$$

הוכח כי $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה.