תרגול אוטומטים

הגדרה! יהיו Σ - א"ב ו Γ - א"ב.
הומומורפיזם מ Σ^* ל Γ^* היא פונקציה
$h: \Sigma^* \longrightarrow \Gamma^*$

המקיימת $\forall x,y \in \Sigma^* \quad h(xy) = h(x) \cdot h(y)$

דוגמה: $\Sigma = \{a,b\}$ $\Gamma = \{0,1,2\}$ נגדיר $h(\varepsilon) \stackrel{?}{=}$

לפני שאנחנו בודקים את ההגדרה נשים לב שלכל הומומורפיזם

$h(\varepsilon) = \varepsilon$

מדוע?

$\varepsilon = \varepsilon\varepsilon$

$h(\varepsilon) \stackrel{\Downarrow}{=} h(\varepsilon\varepsilon) = h(\varepsilon) \cdot h(\varepsilon)$

לפי הגדרת הומומורפיזם.

כלומר אם נסמן $h(\varepsilon) = w$
אזי קיבלנו $w = w \cdot w$
ולכן $w = \varepsilon$.

נמשיך בהגדרה אם כן $h(\varepsilon) = \varepsilon$

$h(a) = 00$

$h(b) = 121$

ונגדיר אם $w = \sigma w'$ עבור $\sigma \in \Sigma$

$h(w) = h(\sigma) \cdot h(w')$

מעצם ההגדרה האינדוקטיבית נובעת הוכחה הפשוטה באינדוקציה ש-h אכן הומומורפיזם.

(לא נוכיח את הדוגמה).

אבל למעשה בכל הומומורפיזם עבור מילה $x \in \Sigma^*$

$h(x)$ נקבע באופן יחיד ע"י h על אותיות x

$x = a_0 a_1 a_2 \ldots a_n$ $a_i \in \Sigma$ כ"ו $h(x) = h(a_0 \ldots a_n) = h(a_0) \cdot h(a_1) \cdots h(a_n)$

~~כלומר~~ ~~מספיק שלנ~~

כלומר, בכדי להגדיר הומומורפיזם h מ-Σ^* ל-Γ^*

מספיק שנגדיר את $h(\sigma)\in\Gamma^*$ לכל $\sigma\in\Sigma$

משפט יהי $h:\Sigma^*\to\Gamma^*$ הומומורפיזם ותהי $B\subseteq\Gamma^*$ שפה רגולרית אזי $L=h^{-1}B \leftarrow$ שפה רגולרית

הוכחה: $L=\{x\in\Sigma^* \mid h(x)\in B\}$

יהי M אוטומט סופי דטרמיניסטי כך ש $L(M)=B$

$$M=(Q_M,\Gamma,\delta_M,s_M,A_M)$$

נגדיר אוטומט N DFA $N=(Q_N,\Sigma,\delta_N,s_N,A_N)$

ונרצה להראות ש-N מקבל את L

הגדרת N: $Q_N=Q_M$ $s_N=s_M$

$A_N=A_M$

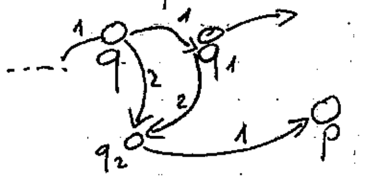
כיצד נגדיר את δ_N?

מ-q ל-p בעזרת האות σ

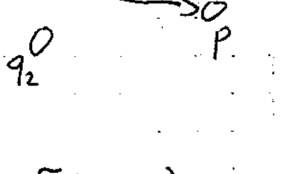
הרעיון הוא שכל מעבר באוטומט N ייצג מסלול שבעזרתו נעבור באוטומט M עם המילה $h(\sigma)$.

כלומר אם $h(b)=121$ ובאוטומט M עם המילה 121 כאשר מתחילים במצב q נעבור למצב p, אזי $\delta_N(q,b)=p$.

M



N



ובאופן פורמלי -

$$\delta_N(q,\sigma)=p \iff (q,h(\sigma)) \vdash^*_{\delta_M} (p,\varepsilon)$$

שני האוטומטים דטרמיניסטיים

III

בכדי להוכיח את ~~...~~ המשפט נטען ראשית

טענת עזר: $(q,x)\vdash^*_{\delta_N}(p,\varepsilon) \Longleftrightarrow (q,h(x))\vdash^*_{\delta_M}(p,\varepsilon)$

הוכחת ט.ע: $\forall x\in\Sigma^*\ \forall q\in Q_N$

$$h(x)=\varepsilon \Leftarrow x=\varepsilon \Leftarrow |x|=0$$

ומכיון ששני האוטומטים דטרמיניסטים

$\delta_N(q,\varepsilon)=q$ וגם $\delta_M(q,\varepsilon)=q$

$|x|=1 \Rightarrow x=a\in\Sigma$ (x הוא תו a כלשהו ב Σ).

$$(q,a)\vdash^*_{\delta_N}(p,\varepsilon)\Longleftrightarrow(q,a)\vdash_{\delta_N}(p,\varepsilon)\overset{\text{ורק}}{\Longleftrightarrow}(q,h(a))\vdash^*_{\delta_M}(p,\varepsilon)$$

מהגדרת δ_N.

נניח נכונות לכל n:

תהי $x\in\Sigma^*$ ו-$|x|=n+1$, כלומר $x=\sigma\alpha$ עבור $\sigma\in\Sigma$ $\alpha\in\Sigma^*$

$$(q,x)\vdash^*_{\delta_N}(p,\varepsilon)\Longleftrightarrow(q,\sigma)\vdash_{\delta_N}(q',\varepsilon)\wedge(q',\alpha)\vdash^*_{\delta_N}(p,\varepsilon)$$

$\Longleftrightarrow$ לפי הנחת האינדוקציה ולפי הגדרת δ_N

$$(q,h(\sigma))\vdash_{\delta_M}(q',\varepsilon)\wedge(q',h(\alpha))\vdash^*_{\delta_M}(p,\varepsilon)$$

$\Longleftrightarrow$ כיוון $h(x)=h(\sigma)\cdot h(\alpha)$ וגם לפי הגדרת δ_M

$$(q,h(\sigma\alpha))\vdash^*_{\delta_M}(p,\varepsilon)$$

$$\Longleftrightarrow (q,h(x))\vdash^*_{\delta_M}(p,\varepsilon)$$

$\square$

ולכן: $x\in L(N)\Longleftrightarrow(s_N,x)\vdash^*_{\delta_N}(p,\varepsilon)\wedge p\in A_N$

הגדרת A_N טענת העזר

$$h(x)\in L(M)\Longleftrightarrow(s_M,h(x))\vdash^*_{\delta_M}(p,\varepsilon)\wedge p\in A_M$$

כלומר

$$x\in L(N)\Longleftrightarrow h(x)\in L(M)$$

IV

משפט לכל שפה רגולרית $A\subseteq\Sigma^*$ השפה $L=\{h(x) \mid x\in A\}$ גם היא רגולרית.

הוכחה:

יהי M האוטומט עבור A $M=\langle Q_M,\Sigma,\delta_M,s_M,A_M\rangle$

נבנה אוטומט N עבור L

$N=\langle Q_N,\Gamma,\Delta_N,s_N,A_N\rangle$

באופן הבא:

$Q_N=Q_M$

$s_N=s_M$

$A_N=A_M$

עתה נגדיר את Δ_N

$\langle q,\alpha,p\rangle\in\Delta_N \overset{\text{מוגדר}}{\Longleftrightarrow}$ קיים $a\in\Sigma$ כך ש $h(a)=\alpha$

! $\delta_M(q,a)=p$

צ"ל $L(N)=L$

כיוון 1 $(\Leftarrow)$

תהי $x\in L$ כלומר $x=h(y)$ $\exists y\in\Sigma^*$

ולכן $y\in A$ $\Rightarrow (s_M,y)\vdash^*_{\delta_M}(p,\varepsilon)\wedge p\in A_M$

IV

טענה: (**) יהא $y\in\Sigma^*$ המקיים $(s_M, y)\vdash^*_{\delta_M}(p,\varepsilon)$

ויהא $w = h(y)$ אזי $(s_N, w)\vdash^*_{\Delta_N}(p,\varepsilon)$

הבקרת p במצב יחיד היא לכן כיוון ש $Q_N = Q_M$

<u>הוכחה:</u>

באינדוקציה על אורך y.

$|y|=0 \Rightarrow y=\varepsilon \Rightarrow (s_M,y)\vdash^*_{\delta_M}(s_M,\varepsilon)$ (כיוון ש-M דטרמיניסטי).

$\Downarrow$ לפי הגדרת ההומומורפיזם.

$h(y)=\varepsilon \Rightarrow (s_N,w)\vdash^*_{\Delta_M}(s_N,\varepsilon)$ (כיוון שנוכל לקחת 0 צעדים).

$S_N = S_M$ לפי הגדרה

נניח נכונות לכל y באורך n.

<u>נוכיח לגבי n+1</u>

יהא $y\in\Sigma^*$ באורך $|y|=n+1$ $y = x\cdot\sigma$ עבור $x\in\Sigma^*$, $\sigma\in\Sigma$. $n=|x|$.

ונאמר $(s_M,y)\vdash^*_{\delta_M}(p,\varepsilon)$

ויהא q כך ש: $(s_M,x)\vdash^*_{\delta_M}(q,\varepsilon)$

לפי <u>ה.א</u> $q\in\{q' \mid (s_N,h(x))\vdash^*_{\Delta_N}(q',\varepsilon)\}$

יהא $\alpha=h(\sigma)$ לפי הגדרת Δ_N, $\Delta_N \ni \langle q,\alpha,p\rangle$

אם קיים $a\in\Sigma$! $\delta_M(q,a)=p$.

אולם כיוון ש-M דטרמיניסטי ומאחר ו $(s_M,x)\vdash^*_{\delta_M}(q,\varepsilon)$

וגם $(s_M, \underbrace{x\sigma}_{y})\vdash^*_{\delta_M}(p,\varepsilon)$

הרי ברור כי $\delta_M(q,\sigma)=p$

ולכן $\Delta_N\ni\langle q,\alpha,p\rangle$

עתה מכיוון ש $h(y)=h(x\sigma)=h(x)\cdot h(\sigma)$

ומכיוון ש $(s_N,h(x))\vdash^*_{\Delta_M}(q,\varepsilon) \wedge (q,h(\sigma))\vdash_{\Delta_N}(p,\varepsilon)$

מתקיים - $(s_N,h(y))\vdash^*_{\Delta_N}(p,\varepsilon)$

כנדרש.

VI

מהלמה (**) נובע, אם כן, כי

אם $p\in A_M \wedge (S_M,y)\vdash^*_{\delta_M}(p,\varepsilon) \Longleftarrow \exists y\in A\ x=h(y) \Longleftarrow x\in L$

לפי (**) $\Downarrow$

$p\in A_N \wedge (S_N,x)\vdash^*_{\Delta_N}(p,\varepsilon) \Longrightarrow x\in L(N)$

לפי הגדרת A_N.

<u>כיוון שני</u> ($\Longrightarrow$)

<u>טענה:</u> (***) יהא $y\in\Gamma^*$

אם $(s_N,y)\vdash^*_{\Delta_N}(p,\varepsilon)$ אזי קיים $x\in\Sigma^*$ המקיים $h(x)=y$ וגם $(s_M,x)\vdash^*_{\delta_M}(p,\varepsilon)$.

<u>הוכחה:</u>

באינדוקציה על אורך המסלול המינימלי ב-N אשר מוביל את ~~~~ מ-S_N ל-p.

<u>$n=0$</u> - מספר המעברים הוא 0 ולכן $p=s_N$ וגם נובע $y=\varepsilon$.

$\Leftarrow$ $x=\varepsilon$ ואכן $(s_M,\varepsilon)\vdash^*_{\delta_M}(s_M,\varepsilon)$.

נניח נכונות (***) לכל p,y ~~~~ שאורך המסלול המינימלי ב-N מ-S_N ל-p בעבור y הוא באורך n ונוכיח ל-$n+1$.

$y\in\Gamma^*$ $(S_N,y)\vdash^*_{\Delta_N}(p,\varepsilon)$ אורך המסלול המינימלי המעביר את y מ-S_N ל-p הוא N.

נתבונן במעבר האחרון שנעשה על y בכדי להגיע ל-p.

יהא q - המצב הקודם לפני מעבר זה ותהי α האות של y אשר בעזרתה נעשה המעבר. כלומר $\langle q,\alpha,p\rangle\in\Delta_N$

ומהגדרת Δ_N נובע קיים $a\in\Sigma$ כך ש- $h(a)=\alpha$ וגם $\delta_M(q,a)=p$.

מצד שני אם $y=\beta\cdot\alpha$ אזי $(s_N,\beta)\vdash^*_{\Delta_N}(q,\varepsilon)$ והמסלול הקצר ביותר עבור הזוג הזה הוא באורך n. ולכן קיים $x'\in\Sigma^*$ עבורו ~~~~

$$(s_M,x')\vdash^*(q,\varepsilon) \quad \text{וגם} \quad h(x')=\beta$$

ולכן $\delta_M(q,a)=p \Downarrow$ ~~~~ $h(x')\cdot h(a)=h(x'a) \Downarrow$

מתקיים: $(s_M,x'a)\vdash^*_{\delta_M}(p,\varepsilon) \wedge h(x'\cdot a)=\beta\cdot\alpha$

ולכן אם נסמן $x=x'a$ הרי קיים $x\in\Sigma^*$ עבורו $(s_M,x)\vdash^*_{\delta_M}(p,\varepsilon) \wedge h(x)=y$.

V II

מהערה (***) נובע כי אם $y\in L(N)$

כלומר $p\in A_N \wedge (s_N,y)\vdash^*_{\Delta_N}(p,\varepsilon)$

אז קיים $x\in\Sigma^*$ המקיים

$$p\in A_M \wedge (S_M,x)\vdash^*_{\delta_M}(p,\varepsilon)\wedge h(x)=y$$

כלומר

$h(x)=y$ וגם $x\in A$

ולכן $y\in L$

מ.ש.ל.