סקיצה של פתרונות - תרגיל 2

פתרונות ל:

25 a,b,c,d
30
32 a,b,c
37 d,i
38 b,f
39

(39)

ביטויים רגולריים α,β

$\varepsilon \notin L_\alpha$

פתרון המשוואה $\quad (*)\ \ \alpha x \cup \beta = x$

הוא ביטוי רגולרי x המקיים

$(**)\ \ L_{\alpha x} \cup L_\beta = L_x$

הפיתרון יהיה "יחיד" במובן שכל ביטוי רגולרי אחר x' שמהווה פתרון למשוואה (כלומר מקיים את (**)) הוא שקול ל x. (כלומר $L_{x'} = L_x$).

$x = \alpha^*\beta$. (או כל ביטוי רגולרי הנותן בדיוק את-אותה שפה)

x פיתרון כי:

$$L_{\alpha\alpha^*\beta} \cup L_\beta = L_{\alpha^*\beta}$$

$$L_{\alpha\alpha^*\beta\cup\beta} = L_{(\alpha\alpha^*\cup\varepsilon)\beta} = L_{\alpha^*\beta}$$

הפיתרון "יחודי", מצויין שבמקרה שבו $\varepsilon \notin L_\alpha$ אז ה x' היחיד שעבורו $\alpha x' \cup \varepsilon = x'$ הוא $x' = \alpha^*$.

(אם $\varepsilon \in L_\alpha$ אז לכל פיתרון $x' = \gamma^*$ כך ש $L_\alpha \subseteq L_\gamma$ נקבל $L_{\alpha\gamma^*} \subseteq L_{\gamma^*}$

ולכן x' יהיה פתרון לא יחודי $(\alpha x' \cup \varepsilon = x'$

$x = x'\beta$ פתרון יחודי למשוואה המקורית.

(38) (ב) $(011^*0)^*$

ביטוי שקול (אותה שפה) אך עם גובה-* נמוך יותר:

$$01(1001 \cup 1)^*10 \cup \varepsilon$$

הסבר: נסתכל על מילים שנוצרות מהביטוי $(0111^*0)^*$ באופן כללי!

$\underline{011}\ldots\ldots0011\ldots\ldots0011\ldots\ldots\underline{0}$

התחלה   סדרה אמצעית   סדרה אמצעית   סוף

אופציה אחת לביטוי היא:

$$\varepsilon \cup 011(0011 \cup 1)^*0$$

דרך נוספת: שימו לב ש

$$L_{(\underline{011}1^*\underline{0})^*} = L_{(\underline{011}^*\underline{10})^*}$$

ניתן להסתכל על מילה כללית באופן הבא:

$\underline{01}\ldots\ldots1001\ldots\ldots1001\ldots\underline{10}$

התחלה   סדרה אמצעית   סוף

והביטוי

$$\varepsilon \cup 01(1001 \cup 1)^*10$$

(38) (F) $(0(1^*2)^*)^*$

מצא ביטוי רגולרי שקול עם גובה-* נמוך יותר.

נבחין שהמילים הנוצרות מהביטוי הן מהצורה

0002000201...1200002 01..12

כלומר מורכבים מתוך מילים הנוצרים מהביטויים
הרגולריים 0 או 01^*2

סה"כ : $(0\cup 01^*2)^*$

(37) (d) $\Sigma=\{a_1,a_2\dots a_n\}$ תהי L שפה רגולרית.

L' - כל המילים מ-L שאינן מכילות את התו (הנתון) σ.

נראה ש-L' רגולרית:

* L_1 - כל המילים שמכילות את התו σ לפחות פעם אחת.

L_1 רגולרית כי הביטוי שמתאים לה הוא:

$$(a_1\cup\dots\cup a_n)^*\sigma(a_1\cup a_2\cup\dots\cup a_n)^*.$$

** L_2 - כל המילים ב-Σ^* שאינן מכילות את התו σ אפילו פעם אחת. $L_2=\Sigma^*\setminus L_1$

L_2 רגולרית כי היא משלימה של שפה רגולרית L_1 ואוסף השפות הרגולריות סגור תחת השלמה.

*** $$L'=L\cap L_2$$

L' רגולרית כי הוא חיתוך של שני שפות רגולריות.

(37) (ג)

יהי L שפה רגולרית.

$$L' = \{ w_1 \sigma w_2 \mid w_1 w_2 \in L \}$$

נראה כי L' רגולרית.

יהי $M=(Q_M, \Sigma, \delta_M, s_M, A_M)$ אוטומט DFA שמקבל את L.

נבנה FA שמקבל את L': $N=(Q_N, \Sigma, \Delta_N, s_N, A_N)$

1 - לכל מצב $q \in Q_M$ נוסיף 2 מצבים ל Q_N
q ו q'.

2. - אם $s_M \in Q_M$ היה מצב התחלתי אז
$s_M = s_N$ (המצב s_M ולא המצב s'_M)

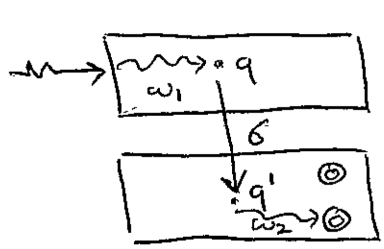
3. - אם $q \in A_M$ מצב מקבל אז $q' \in A_N$ מצב
מקבל ואילו $q \in Q_N$ (ללא הגג) מצב לא מקבל.

4. - יהיו המעברים:

- אם $\delta_M(q, a) = p$ אז $(q, a, p) \in \Delta_N$
$(q', a, p') \in \Delta_N$

- לכל $q \in Q_M$ יהיה מעבר $(q, \sigma, q') \in \Delta_N$

<u>הסבר</u>: בונים את N משני "עותקים" של M.



הראשון עם מצב התחלי וכל המצבים
המקבלים הפכו למצבים לא מקבלים.
והעותק השני עם מצבים מקבלים.
מכל מצב q ניתן לעבור ל q' עם σ.

(32) (a) $L \subseteq \Sigma^*$ הוכח עבור

$$(L^*)^* = L^*$$

⇐ צ"ל: $L^* \subseteq (L^*)^*$

לפי הגדרה $*$: $(L^*)^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (L^*)^n$

ומכיוון ש $L^* = (L^*)^1$ אז

מקבלים ש: $L^* = (L^*)^1 \subseteq \bigcup_{n} (L^*)^n = (L^*)^*$

⇒ צ"ל $(L^*)^* \subseteq L^*$.

נקח $x \in (L^*)^*$ לפי הגדרת-$*$ $\overbrace{x,}^{\text{קיים } n}$ הוא

שרשור של n מילים, כל אחת מהן שייכת ל L^* .

כלומר $\exists n \in \mathbb{N}$ וקיימים $y_1,\dots,y_n$ כך ש $x = y_1 y_2 \dots y_n$

. $y_i \in L^*$

לכל $y_i \in L^*$ קיים m_i כך ש y_i שרשור של m_i

מילים $z_{i1}\dots z_{im_i}$ שכל אחת מהן שייכת ל L .

כך ש $y_i = z_{i1} z_{i2} \dots z_{im_i}$ ש $z_{ij} \in L$; $1 \le j \le m_i$.

סה"כ המילה x מורכבת ממילים ב L באופן הבא:

$$x = y_1 \dots y_n = \underbrace{z_{11} z_{12} \dots z_{1m_1}}_{\text{מילים ב } y_1} \underbrace{z_{21} z_{22} \dots z_{2m_2}}_{\text{מילים ב } y_2} \dots \underbrace{z_{n1} z_{n2} \dots z_{nm_n}}_{\text{מילים ב } y_n}$$

בסה"כ x מורכב מ-$\left(k = \sum_{i=1}^{n} m_i\right)$ מילים ב L ולכן $x \in L^k \subseteq L^*$

. □

(32) (b) $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* L_2^*)^*$

לא ניתן להחליף בכל מקרה את אגף ימין

בביטוי $(L_1L_2)^*$ ולצאת מצויין.

שקיימים מקרים שבהם $\underbrace{(L_1^*L_2^*)^*}_{(2)} \neq \underbrace{(L_1L_2)^*}_{(1)}$

בכל מקרה שבו $\varepsilon \notin L_1$ או ש $\varepsilon \notin L_2$

השפות (1) ו (2) אינן שוות.

הביטויים שקולים כאשר $\varepsilon \in L_1 \cap L_2$.

(c)

אם $\varepsilon \in L_1$ אז

(1) $(L_1 \cup L_1 L_2)^* = L_1(L_1 \cup L_2 L_1)^*$ (2)

(1) $(L_1 \cup L_1 L_2)^* = (L_1\{\varepsilon\} \cup L_1 L_2)^* = (L_1(\{\varepsilon\} \cup L_2))^*$

(2) $L_1(L_1 \cup L_2 L_1)^* = L_1((\{\varepsilon\} \cup L_2)L_1)^*$

נסמן $L_3 = L_2 \cup \{\varepsilon\}$ (ב-L_3 יש מילה ריקה)

כעת (1) $(L_1 L_3)^*$

וגם $\varepsilon \in L_1 \cap L_3$ (2) $L_1(L_3 L_1)^*$

בשלב זה רק להראות ש (1) ו (2) שקולים:

$\Leftarrow$ אם $x \in (L_1 L_3)^*$ אז x מורכב של מילים

$x = y_1 y_2 y_3 \cdots y_{2n}$

כאשר y_i - i אי זוגי $y_i \in L_1$

i זוגי $y_i \in L_3$

$$\begin{array}{cccccc} x = y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_{2n-1} & y_{2n} \\ \Uparrow & \Uparrow & \Uparrow & & \Uparrow & \Uparrow \\ L_1 & L_3 & L_1 & \cdots & L_1 & L_3 \end{array}$$

כ

אז

$$x = \underbrace{y_1}_{L_1} \underbrace{y_2 y_3}_{L_3L_1} \cdots \underbrace{y_{2n-2} y_{2n-1}}_{L_3L_1} \underbrace{y_{2n}\varepsilon}_{L_3L_1}$$

הוספנו ε ל x ועדיין $x = x\varepsilon$ וכן $\varepsilon \in L_1$.

לכן $x \in L_1(L_3L_1)^*$

כיוון שני נעשה שיקול דומה.

(3ט)

$$(L^c)^* \neq (L^*)^c$$

ניתן דוגמה שבה אין שוויון:

$L = \{0\}$

$\Sigma = \{0,1\}$

$L^* = \{0\}^*$ $\quad (L^*)^c = \{$מילים שמכילות "1" לפחות פעם אחת$\}$

$L^c = \Sigma^* - \{0\}$

$(L^c)^* = \{$שרשורים של מילים שאינן "0"$\} = L^c = \Sigma^* - \{0\}$

האם יתכן כי $(L^c)^* = (L^*)^c$?

לא.

נסתכל כי ε תמיד שייכת לאגף שמאל

מפני שזה $*$. $\varepsilon \in (L^c)^*$

כמו כן $\varepsilon \in L^*$ לכל L.

אך לפי הגדרת המשלים $\varepsilon \notin (L^*)^c$

ולכן ε לא שייכת לאגף ימין.

כלומר אין שוויון.

מסקנה: לכל L מתקיים ש $(L^c)^* \neq (L^*)^c$.

25 (a) הראנו בתרגול ש $xy = yx$

אמ"מ x ו y חזקות טבעיות של מילה w.

(b) $xyx = yxy$

אמ"מ $x = y$. כזאת מפני ש:

- אם $|x| = |y|$ ושניהם רישא של אותה מילה

אז $x = y$

- אם $|x| < |y|$ אז $|xyx| < |yyx| = |yxy|$

אבל זה לא יתכן ש $|xyx| < |yxy|$ כי $xyx = yxy$.

(כנ"ל אם $|y| < |x|$). מסקנה $x = y$.

(25) (c) $xyx = yxy^2$

$$\overbrace{xy}\,\overbrace{x} = \overbrace{yx}\,\overbrace{yy}$$

נשים לב e $|xy| = |yx|$ בגל x ו־y

לפיכך $|yy| = |x|$ הכרחי לקיום השוויון.

כמו כן מכיוון e $xy = yx$

אז לפי סעיף (a) מקבלים e

$x = w^k$ ו־ $y = w^l$

$|x| = 2|y|$ ולכן $k = 2l$.

(d) $xy^2x = yx^2y$

$$\overbrace{xy}\,\overbrace{yx} = \overbrace{yx}\,\overbrace{xy}$$

נסמן $w_1 = xy$

$w_2 = yx$ $\qquad w_1 w_2 = w_2 w_1$

לפי (a) w_1 ו־ w_2 חזקות של מילה w.

אך אם $xy = yx$ ולכן y ו־ x חזקות של מילה w.

כלומר אותו אפיון כמו ב־ (a).