תרגיל 7 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. (א) יהי $\varepsilon > 0$ כלשהו, אזי

$$\left|\frac{16x^2-9}{4x-3}-6\right| = |4x+3-6| = |4x-3| = 4\cdot\left|x-\frac{3}{4}\right| < \varepsilon$$

עבור $0 < \left|x-\frac{3}{4}\right| < \delta = \frac{\varepsilon}{4}$. מכאן לפי הגדרת הגבול נקבל כי $\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}}\frac{16x^2-9}{4x-3} = 6$.

(ב) יהי $A > 0$ כלשהו ונבחר $\delta_1 = 1$. אזי לכל $|x+2| < \delta_1 = 1$ מתקיים

$$-1 < x+2 < 1 \Leftarrow -3 < x < -1 \Leftarrow 1 < x^2 < 9 \Leftarrow x^2+1 > 2$$

ולכן $\frac{x^2+1}{(x+2)^2} > \frac{2}{(x+2)^2}$. בנוסף, אי-השוויון $\frac{2}{(x+2)^2} > A$ מתקיים לכל $|x+2| < \delta_2 = \sqrt{\frac{2}{A}}$. ולכן אם

ניקח $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, נקבל כי לכל $|x+2| < \delta$ מתקיים $\frac{x^2+1}{(x+2)^2} > \frac{2}{(x+2)^2} > A$. מכאן לפי הגדרת

הגבול $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+1}{(x+2)^2} = +\infty$.

(ג) יהי $\varepsilon > 0$ כלשהו, אזי לכל $x > \frac{2}{3}$ מתקיים

$$\left|\frac{2x+1}{3x-2}-\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{7}{3(3x-2)}\right| = \frac{7}{9}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{2}{3}\right)} < \frac{1}{\left(x-\frac{2}{3}\right)}$$

אם נסמן עכשיו $M = \frac{1}{\varepsilon}+\frac{2}{3}$, נקבל כי לכל $x > M = \frac{1}{\varepsilon}+\frac{2}{3}$

מתקיים $x-\frac{2}{3} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftarrow \frac{1}{\left(x-\frac{2}{3}\right)} < \varepsilon \Leftarrow$

$\Leftarrow \left|\frac{2x+1}{3x-2}-\frac{2}{3}\right| < \frac{1}{\left(x-\frac{2}{3}\right)} < \varepsilon$. מכאן לפי הגדרת הגבול באינסוף נקבל כי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x-2} = \frac{2}{3}$.

2. (א) נניח כי $\lim_{x\to 0} f(x)=L$. אזי עבור $\varepsilon>0$ קיים $0<\delta<\frac{\pi}{2}$, כך שאם $0<|y|<\delta$ אז $|f(y)-L|<\varepsilon$. ואם $0<|x|<\delta$, אז $0<|y|=|\sin x|<|x|<\delta$ ולכן $|f(\sin x)-L|<\varepsilon$. מכאן מתקיים $\lim_{x\to 0} f(\sin x)=L$.

כיוון שני. נניח כי $\lim_{x\to 0} f(\sin x)=L$. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $0<\delta<\frac{\pi}{2}$, כך שאם $0<|x|<\delta$ אז $|f(\sin x)-L|<\varepsilon$. ואם עכשיו $0<|y|<\sin\delta$, אז $0<|x|=|\arcsin y|<\delta$ ולכן $|f(y)-L|=|f(\sin x)-L|<\varepsilon$. מכאן מתקיים $\lim_{x\to 0} f(x)=L$.

ב. נובע מייד, כי אם $\lim_{x\to 0} f(x)=L$, אז גם $\lim_{x\to 0} f(|x|)=\lim_{|x|\to 0} f(|x|)=L$. ההפך לאו דווקא נכון, כי לדוגמא $\lim_{x\to 0}[|x|]=0$, אבל $\lim_{x\to 0}[x]$ אינו קיים.

3. (א) יש להראות ש- $\lim_{x\to 0} f(x)=0$. בהינתן $\varepsilon>0$ נבחר $\delta=\varepsilon$ ואז נקבל

$$0<|x-0|<\delta=\varepsilon \quad\Rightarrow\quad |f(x)-0|=|x|<\delta=\varepsilon$$

ולכן, לפי הגדרת הגבול של פונקציה, מתקיים $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

(ב) יש להראות שלכל $a\neq 0$ לא קיים הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$. נגדיר סדרה $n\in N,\delta_n=\frac{1}{n}$ ונקבל

$$\forall n\in N,\ \exists x_n\in\left(a,a+\frac{1}{n}\right)\bigcap Q \quad\Rightarrow\quad \left(0<|x_n-a|<\frac{1}{n}\right)\wedge\left(|f(x_n)-a|=|x_n-a|<\frac{1}{n}\right)$$

כלומר עבור הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ וגם $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=a$.

בנוסף, מתקיים

$$\forall n\in N,\ \exists x'_n\in\left(a,a+\frac{1}{n}\right)\bigcap R\setminus Q \quad\Rightarrow\quad \left(0<|x'_n-a|<\frac{1}{n}\right)\wedge\left(|f(x'_n)-(-a)|=|-x'_n+a|<\frac{1}{n}\right)$$

כלומר עבור הסדרה $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} x'_n=a$ וגם $\lim_{n\to\infty} f(x'_n)=-a$. מכך ש-

$\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq\lim_{n\to\infty} f(x'_n)$ כי $a\neq 0$, לפי הגדרת הגבול של היינה, נקבל כי הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ אינו קיים.

(ג) יש להראות שלא קיים הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x+1}$. נשים לב לכך ש-

$$\forall n\in N,\ \exists x_n\in(n,\infty)\bigcap Q \quad\Rightarrow\quad \frac{f(x_n)}{x_n+1}=\frac{x_n}{x_n+1}$$

כלומר עבור הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ וגם $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x_n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_n+1} = 1$.

בנוסף,

$$\forall n\in N, \exists x'_n \in (n,\infty)\bigcap R\setminus Q \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x'_n)}{x'_n+1} = \frac{-x'_n}{x'_n+1}$$

כלומר עבור הסדרה $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} x'_n = \infty$ וגם $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x'_n)}{x'_n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{-x'_n}{x'_n+1} = -1$.

מכך ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x_n+1} \neq \lim_{n\to\infty}\frac{f(x'_n)}{x'_n+1}$, לפי הגדרת הגבול של היינה, נקבל כי הגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$ אינו קיים.

4. נחקור רציפות של הפונקציות הבאות:

(א) $$f(x)=\begin{cases}\frac{e^{x^2-2x}-1}{3x-6}, & x\neq 2\\ \frac{2}{3}, & x=2\end{cases}$$

נציין כי לכל $x\neq 2$ הפונקציה $y=e^{x^2-2x}$ היא פונקציה רציפה כהרכבה של פונקציות אלמנטאריות, ולכן $f(x)$ רציפה כמנה של פונקציות רציפות. נבדוק רציפות בנקודה $x=2$. נחשב גבול

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{e^{x^2-2x}-1}{3x-6} = \lim_{x\to 2}\frac{e^{x(x-2)}-1}{3(x-2)} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{e^{x(x-2)}-1}{x(x-2)}\cdot\frac{x}{3}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{e^{x(x-2)}-1}{x(x-2)}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{x}{3} = \frac{2}{3}$$

לפי הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$. מכיוון שמתקיים $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$, פונקציה $f(x)$ רציפה גם בנקודה $x=2$.

(ב) $$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{x}, & x<\frac{\pi}{2}\\ [x]-1, & \frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{5}{2}\\ \frac{1}{2x-5}, & x>\frac{5}{2}\end{cases}$$

בתחום $x<\frac{\pi}{2}$ ישנה נקודה $x=0$ בה פונקציה אינה מוגדרת. מכך שקיים גבול סופי

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=1\cdot 2=2$$

נקבל כי $x=0$ היא נקודת אי-רציפות סליקה. נציין כי לכל $x\in(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ פונקציה רציפה כמנה של

כאלה. נבדוק נקודה $x=\frac{\pi}{2}$. נחשב גבולות חד-צדדיים ונשתמש בכך שלכל $x\neq k, k\in Z$ קיימת רציפות

עבור $y=[x]$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{x}=\frac{\sin\pi}{\frac{\pi}{2}}=0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}([x]-1)=\left[\frac{\pi}{2}\right]-1=1-1=0$$

מכך ש-$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ נקבל כי בנקודה $x=\frac{\pi}{2}$ פונקציה רציפה.

בתוך התחום $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{5}{2}$ ישנה נקודה $x=2$ שבה מתקיים

$$\lim_{x\to 2-}([x]-1)=1-1=0\neq\lim_{x\to 2+}([x]-1)=2-1=1$$

לכן $x=2$ היא נקודת אי-רציפות מסוג I. לכל $x\in\left[\frac{\pi}{2},2\right)\cup\left(2,\frac{5}{2}\right)$ פונקציה רציפה.

נבדוק עכשיו את $x=\frac{5}{2}$. נחשב גבולות חד-צדדיים:

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}-} f(x)=\lim_{x\to\frac{5}{2}}([x]-1)=2-1=1$$

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}+} f(x)=\lim_{x\to\frac{5}{2}+}\frac{1}{2x-5}=+\infty$$

מכאן $x=\frac{5}{2}$ היא נקודת אי-רציפות מסוג II ולכל $x\in\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ פונקציה רציפה.

ג) $f(x)=\sin\left(\frac{1}{\ln(x^2)}\right)$

$f(x)$ רציפה לכל $x \neq 0,\pm 1$ כהרכבה של פונקציות אלמנטאריות. מכך ש- $\lim_{x\to 0}\ln\left(x^2\right) = -\infty$ נקבל כי

$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{\ln\left(x^2\right)}\right) = \sin\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln\left(x^2\right)}\right) = 0$ ולכן $x=0$ היא נקודת אי-רציפות סליקה.

נבחר עכשיו שתי סדרות $x_n'' = e^{\frac{1}{4\pi n+\pi}}$, $x_n' = e^{\frac{1}{2\pi n}}$, אזי $\lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} x_n'' = 1$. אבל

$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty}\sin \pi n = 0$ ו- $\lim_{n\to\infty} f(x_n'') = \lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1$. מכאן לא קיים $\lim_{x\to 1} f(x)$. באותו

אופן ניתן להראות כי לא קיים גם $\lim_{x\to -1} f(x)$ (לבחור, למשל, $x_n' = -e^{\frac{1}{2\pi n}}, x_n'' = -e^{\frac{1}{4\pi n+\pi}}$). לכן $x=\pm 1$ הן

נקודות אי-רציפות מסוג II.

(ד) $f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}$

אם $x<0$ אז $\lim_{n\to\infty} e^{nx} = 0$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}} = x$;

אם $x=0$ נקבל $\lim_{n\to\infty}\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$;

אם $x>0$ אז $\lim_{n\to\infty} e^{nx} = \infty$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}} = 1$. לסיכום, $f(x) = \begin{cases} x, & x<0 \\ \frac{1}{2}, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$

אינה רציפה בנקודה $x=0$ וזאת נקודת אי-רציפות מסוג I, מכיוון ש- $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 0-} f(x) = 0$.

5. (א) הטענה נכונה. מכך ש- $f(x)$ רציפה בנקודה $x=a$, אזי

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 : 0<|x-a|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

מכיוון שמתקיים $\left||x|-|y|\right| < |x-y|$ לכל x ו- y ממשי, נקבל

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 : 0<|x-a|<\delta \quad\Rightarrow\quad \left||f(x)|-|f(a)|\right| < |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

כלומר $\lim_{x\to a}|f(x)| = |f(a)|$, ומכאן $|f(x)|$ רציפה בנקודה $x=a$.

(ב) הטענה אינה נכונה. לדוגמא, נגדיר פונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x\geq 0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

אזי $|f(x)|=1$ לכל x ולכן הפונקציה $|f(x)|$ רציפה בנקודה $x=0$. לעומת זאת $\lim_{x\to 0+} f(x)=1 \neq \lim_{x\to 0-} f(x)=-1$ ולכן $f(x)$ אינה רציפה בנקודה $x=0$.

(ג) הטענה אינה נכונה. לדוגמא, נגדיר פונקציה $f(x)=1-\frac{2}{(0.005)^2}(x-a)^2$. אזי מתקיים

$$x_0=a+0.005\in(a-0.01,a+0.01)\Rightarrow f(x_0)=1-\frac{2}{(0.005)^2}(x_0-a)^2=1-\frac{2}{(0.005)^2}(0.005)^2=-1<0$$

(ד) הטענה נכונה. נניח ש- $f(x)$ רציפה בנקודה $x=a$ ו- $f(a)>0$, אזי מתקיים $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)>0$. ניקח $\varepsilon=\frac{f(a)}{2}$ ונקבל

$$\exists\delta>0:0<|x-a|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-f(a)|<\varepsilon=\frac{f(a)}{2} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{f(a)}{2}<f(x)-f(a)<\frac{f(a)}{2} \quad\Rightarrow\quad 0<\frac{f(a)}{2}<f(x)<\frac{3f(a)}{2}$$

מכאן ב- δ-סביבה של $x=a$ שמצאנו מתקיים $f(x)>0$.

(ה) הטענה אינה נכונה. ראו דוגמא מסעיף (ב).

6. נראה כי הפונקציה $\psi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ הינה רציפה, ההוכחה עבור הפונקציה $\varphi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ היא סימטרית. יהי x_0 ממשי כלשהו, נוכיח כי $\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\psi(x_0)$.

נתבונן במקרים הבאים:

1) נניח כי $f(x_0)>g(x_0)$. ניקח פונקציה $h(x)=f(x)-g(x)$, אז פונקציה זו רציפה ומההנחה $h(x_0)>0$. לפי טענה 5(ד) קיים $\delta_1>0$ כך שלכל $x\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)$ מתקיים

$$h(x)>0 \quad\Rightarrow\quad f(x)>g(x) \quad\Rightarrow\quad \psi(x)=f(x)$$

כעת, עבור $\varepsilon>0$ כלשהו מהרציפות של f קיים $\delta_2>0$ כך שלכל $|x-x_0|<\delta_2$ מתקיים $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. אם נבחר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, נקבל כי לכל $|x-x_0|<\delta$ מתקיים עכשיו $|\psi(x)-\psi(x_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ כנדרש, כלומר ψ רציפה ב- x_0.

2) אם מתקיים $f(x_0)<g(x_0)$, מוכיחים באותו אופן כמו ב-1)

3) נניח כי $f(x_0)=g(x_0)$. ניקח $\varepsilon>0$ כלשהו, אזי מהרציפות של f ומהרציפות של g נקבל כי קיים $\delta_1>0$ כך שלכל $|x-x_0|<\delta_1$ מתקיים $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, וקיים $\delta_2>0$ כך שלכל $|x-x_0|<\delta_2$ מתקיים $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$. ניקח $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ ונבחר $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ שרירותי. אם $f(x)\geq g(x)$, אז $\psi(x)=f(x)$ ו- $|\psi(x)-\psi(x_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. ואם $f(x)<g(x)$, אז $\psi(x)=g(x)$ ו- $|\psi(x)-\psi(x_0)|=|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$. בשני המקרים, ψ רציפה ב- x_0.