תרגיל 6 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. חקרו את התכנסות הטורים הבאים תוך שימוש במבחני התכנסות מתאימים:

(א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ (ה) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4+(-1)^n)^n}$ (ט) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2}$

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$ (ו) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!}$ (י) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5^n+7^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

(ג) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ (ז) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ (יא) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$

(ד) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$ (ח) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$ (יב) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\cdot\ln^{\beta}n\cdot(\ln(\ln n))^{\gamma}}$

__פתרון:__ (א)

$\frac{1}{n^{3/2}}=\frac{1}{n\sqrt{n}}\le\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ ולכן לפי מבחן השוואה, מהתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ נובעת התכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

(ב)

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\le 1+1+\ldots+1=n \Leftarrow \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}\ge\frac{1}{n}$ ולכן לפי מבחן השוואה,

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$ מתבדר.

(ג)

נשווה לטור מתבדר $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

(ד)

נשתמש במבחן קושי:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^5}{\sqrt[n]{2^n+3^n}}=\frac{1}{3}<1$$

זה שהגבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=3$ נובע לפי משפט "סנדוויץ'" מאי-השוויון

$3=\sqrt[n]{3^n}<\sqrt[n]{2^n+3^n}<\sqrt[n]{3^n+3^n}=3\cdot\sqrt[n]{2}$ ומכך ש- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$. לסיכום, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$ מתכנס.

(ה)

$4+(-1)^n \ge 3 \Leftarrow \frac{1}{4+(-1)^n} \le \frac{1}{3} \Leftarrow \frac{1}{\left(4+(-1)^n\right)^n} \le \left(\frac{1}{3}\right)^n$. מכך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ הוא טור

הנדסי מתכנס, נקבל כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(4+(-1)^n\right)^n}$ מתכנס לפי מבחן השוואה.

(ו)

$$a_n = \frac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!} \le b_n = \frac{n\cdot n!}{(2n)!}$$

נשתמש במבחן דלמבר עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot(n+1)!\cdot(2n)!}{(2n+2)!\cdot n\cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2(2n+1)} = 0 < 1$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס לפי מבחן השוואה.

(ז)

נשים לב כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\frac{\left(n^2\right)^n}{\left(2^n\right)^n} = \frac{\left(n^n\right)^2}{2^{n^2}} \le \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. נשתמש במבחן קושי ונקבל

$\sqrt[n]{\frac{\left(n^2\right)^n}{\left(2^n\right)^n}} = \frac{n^2}{2^n}$. נבצע את מבחן השורש לסדרות $\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n} = 0$.

כלומר קיבלנו שמתקיים $\sqrt[n]{\frac{\left(n^2\right)^n}{\left(2^n\right)^n}} = \frac{n^2}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ולכן לפי מבחן קושי נקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n^2\right)^n}{\left(2^n\right)^n}$

מתכנס, ולכן לפי מבחן ההשוואה $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ מתכנס.

(ח)

נשים לב כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$. נבצע את מבחן

ההשוואה הגבולי עם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. נקבל

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

ולכן, מכיוון ש- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר נקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$ מתבדר.

(ט)

נשתמש במבחן קושי ונקבל $\sqrt[n]{\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2}}=\frac{2+\frac{1}{n}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}2$ כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2}$ מתבדר.

(י)

נשים לב כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left(\frac{5^n+7^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\geq\left(\frac{2\cdot 5^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=5$ ולכן לא מתקיים תנאי

ההתכנסות ההכרחי לטורים והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5^n+7^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ מתבדר.

(יא)

נשים לב כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$\ln(n!)=\ln(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n)=\ln(1)+\ln(2)+\ldots+\ln(n)\leq n\ln(n)$$

ולכן $\frac{1}{n\ln(n)}\geq\frac{1}{\ln(n!)}$. ברור כי $\left\{\frac{1}{n\ln(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית מונוטונית יורדת, ולכן נוכל

להשתמש במבחן העיבוי על $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$, ונקבל כי הוא מתכנס או מתבדר יחד עם הטור

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln(2)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\cdot\ln(2^n)}$. לפי מבחן השוואה גבולי עם $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ נקבל $\frac{\frac{1}{n\cdot\ln(2)}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\ln 2}$

ולכן $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln(2)}$ מתבדר, ומכך נובע כי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ מתבדר.

מכיוון שהראנו $\frac{1}{n\ln(n)}\geq\frac{1}{\ln(n!)}$ לפי מבחן ההשוואה נקבל כי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$ מתבדר.

2. נתון כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ הוא טור חיובי.

(א) הוכיחו שאם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ מתכנס.

(ב) הוכיחו שהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ לא בהכרח גוררת את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

(ג) הוכיחו שאם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

פתרון: (א)

לפי אי-שוויון הממוצעים לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sqrt{a_n \cdot a_{n+1}} \le \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ מתכנס, ונוכל לרשום

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + a_{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}\right)$$

כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}\right)$ מתכנס ולכן לפי מבחן ההשוואה גם $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

(ב)

נגדיר סדרה $a_n = \begin{cases} 1, & n = 2k-1 \\ \frac{1}{k^4}, & n = 2k \end{cases}$. נקבל $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{k^4}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ כלומר

מתכנס. אבל לסדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ גבול חלקי 1 $a_{2k-1} = 1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$ ולכן אינה מתכנסת ל-0, כלומר

התנאי ההכרחי להתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ לא מתקיים, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

(ג)

נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס וגם כי $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית. ברור כי היא מונוטונית

יורדת (אחרת לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sqrt{a_n a_{n+1}} \ge \sqrt{a_2 a_1} > 0$ ובפרט לא מתקיים תנאי הכרחי

להתכנסות $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$). מכך שהסדרה מונוטונית יורדת נסיק $a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}^{\ 2}} \le \sqrt{a_n a_{n+1}}$

לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכן לפי מבחן ההשוואה $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ מתכנס. אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ מתכנס.

3. נתון כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי. נסמן $p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}$ ו- $q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$.

(א) הוכיחו כי שני הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ מתבדרים.

(ב) לכל n טבעי נסמן: $P_n = \sum_{k=1}^{k} p_k$ ו- $Q_n = \sum_{k=1}^{k} q_k$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n} = 1$.

פתרון: (א)

נשים לב כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $2\cdot p_n-a_n=2\cdot\frac{|a_n|+a_n}{2}-a_n=|a_n|$. נניח בשלילה כי $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ מתכנס ונקבל כי גם $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}(2\cdot p_n-a_n)=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}p_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, וזו סתירה. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ מתבדר. באופן דומה, לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $2\cdot q_n+a_n=2\cdot\frac{|a_n|-a_n}{2}+a_n=|a_n|$ ולכן אם נניח בשלילה ש- $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}q_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, וזו סתירה. לכן $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ מתבדר.

(ב)

תחילה נציין כי לפי סעיף (א) ידוע לנו כי $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ טור חיובי מתבדר ולכן מתקיים $\lim_{n\to\infty}Q_n=\sum_{n=1}^{\infty}q_n=\infty$. בנוסף, נשים לב כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $q_n+a_n=\frac{|a_n|-a_n}{2}+a_n=\frac{|a_n|+a_n}{2}=p_n$ ולכן אם נגדיר $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ נקבל כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $P_n=Q_n+S_n$. נסמן $\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=L$ כאשר $L\in\mathbb{R}$. נקבל $\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n+S_n}{Q_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{S_n}{Q_n}\right)=1+\frac{L}{\lim_{n\to\infty}Q_n}=1$, כנדרש.

4. קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי או מתבדרים:

(א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ (ג) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}$ (ה) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n-1}}$ (ד) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$ (ו) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}$

פתרון: (א)

נשים לב כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left|\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right|=\frac{1}{\ln(n)}\geq\frac{1}{n}$ ולכן לפי מבחן ההשוואה $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right|$ מתבדר, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ לא מתכנס בהחלט.

נבדוק התכנסות בתנאי. מכיוון שהסדרה $\left\{\frac{1}{\ln(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת ושואפת ל-0 נקבל לפי משפט לייבניץ כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ מתכנס (ולכן מתכנס בתנאי).

(ב)

נשים לב כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n-1}>0$. לכן נקבל כי לכל $n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n-1}}=\left|\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n-1}}\right|$. נבצע את מבחן ההשוואה הגבולי עם הטור המתבדר

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ונקבל $\frac{\frac{1}{2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n-1}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}=\frac{\sqrt[3]{n}}{2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n-1}}=\frac{1}{2+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}$, כלומר

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n-1}}\right|$ מתבדר. מכך נובע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n-1}}$ לא מתכנס בהחלט.

נבדוק התכנסות בתנאי. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n-1}}=\left(\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n-1}}-\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}}\right)+\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}}.$$

מכיוון שהסדרה $\left\{\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת ושואפת ל-0 נקבל לפי לייבניץ כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}}$

מתכנס. בנוסף מתקיים $\frac{1}{4n^{\frac{2}{3}}+(-1)^{n-1}\cdot 2\sqrt[3]{n}}=\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n-1}}-\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}}$. נעשה את מבחן

ההשוואה הגבולי עם הטור המתבדר $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ ונקבל

$$\frac{\frac{1}{4n^{\frac{2}{3}}+(-1)^{n-1}\cdot 2\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}=\frac{n^{\frac{2}{3}}}{4n^{\frac{2}{3}}+(-1)^{n-1}\cdot 2\sqrt[3]{n}}=\frac{1}{4+\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2}{\sqrt[3]{n}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{4},$$

כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^{\frac{2}{3}}+(-1)^{n-1}\cdot 2\sqrt[3]{n}}$ מתבדר.

נקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n^{\frac{2}{3}}+(-1)^{n-1}\cdot 2\sqrt[3]{n}}+\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}}\right)$ מתבדר (כסכום של טור מתבדר ומתכנס).

(ג)

נשים לב כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left|\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}\right|=\frac{|\sin(n\alpha)|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$ ולכן לפי מבחן ההשוואה עם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ נקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}\right|$ מתכנס, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}$ מתכנס בהחלט.

(ד)

נשים לב כי לכל $3\le n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le n$ ולכן $\frac{1}{n}\le\sqrt[n]{n}-1$. אז לפי מבחן ההשוואה עם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ נקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$ לא מתכנס, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$ לא מתכנס בהחלט.

נבדוק התכנסות בתנאי. מכיוון שהסדרה $\left\{\sqrt[n]{n}-1\right\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת ושואפת ל-0 נקבל לפי משפט לייבניץ כי $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$ מתכנס (כלומר הטור מתכנס בתנאי).

(ה)

נשים לב כי לפי מבחן קושי $\sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n}=\sqrt[n]{n}-1\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$ מתכנס, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$ מתכנס בהחלט.

(ו)

נשים לב כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ לא מתכנס בהחלט. נבדוק התכנסות בתנאי. נשים לב כי $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}=\begin{cases}1, & n=4k,4k+3\\ -1, & n=4k+1,4k+2\end{cases}$

ולכן נוכל לרשום

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}=-1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{8}}-\ldots=$$
$$=(-1)^1\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+(-1)^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+(-1)^3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{\sqrt{2k-1}}+\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)$$

נתבונן בתתי הסדרות של סדרת הסכומים החלקיים $\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty},\{S_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$. נראה שלתתי סדרות אלה גבול זהה ומכך נסיק כי סדרת הסכומים החלקיים $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, ולכן הטור מתכנס (בתנאי). נקבל

$$S_{2k}=\sum_{n=1}^{2k}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=(-1)^1\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\ldots+(-1)^k\left(\frac{1}{\sqrt{2k-1}}+\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)=$$
$$=\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\left(\frac{1}{\sqrt{2m-1}}+\frac{1}{\sqrt{2m}}\right)$$

ומכיוון ש- $\left\{\frac{1}{\sqrt{2m-1}}+\frac{1}{\sqrt{2m}}\right\}_{m=1}^{\infty}$ סדרה חיובית מונוטונית שואפת ל-0 נקבל לפי מבחן לייבניץ כי $\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\left(\frac{1}{\sqrt{2m-1}}+\frac{1}{\sqrt{2m}}\right)$ מתכנס, כלומר $\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת.

בנוסף, מכיוון שמתקיים $S_{2k-1}=S_{2k}-a_{2k}$ נקבל

$$\lim_{k\to\infty}S_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}S_{2k}-\lim_{k\to\infty}a_{2k}=\lim_{k\to\infty}S_{2k}-\lim_{k\to\infty}(-1)^{\frac{2k(2k+1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{2k}}=\lim_{k\to\infty}S_{2k}$$

כלומר $\{S_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת. לכן $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וסיימנו.