

תרגיל 6 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. חקרו את התכנסות הטורים הבאים תוך שימוש במבחני התכנסות מתאימים:

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + \frac{1}{n})^n}{n^2} \quad (\text{ט}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4 + (-1)^n)^n} \quad (\text{ה}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \quad (\text{א}) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5^n + 7^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{י}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(2n)!} \quad (\text{ו}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} \quad (\text{ב}) \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)} \quad (\text{יא}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \quad (\text{ז}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n}}} \quad (\text{ג}) \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \cdot \ln^\beta n \cdot (\ln(\ln n))^\gamma} \quad (\text{יב}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \quad (\text{ח}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n} \quad (\text{ד}) \end{array}$$

2. נתון כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור חיובי.

(א) הוכיחו שאם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

(ב) הוכיחו שהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ לא בהכרח גוררת את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ג) הוכיחו שאם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

3. נתון כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי נסמן $p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}$ ו- $q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$.

(א) הוכיחו כי שני הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ מתבדרים.

(ב) לכל n טבעי נסמן: $P_n = \sum_{k=1}^n p_k$ ו- $Q_n = \sum_{k=1}^n q_k$. הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = 1$.

4. קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי או מתבדרים:

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{n} - 1)^n \quad (\text{ה}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n^2} \quad (\text{ג}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \quad (\text{א}) \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \quad (\text{ו}) & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{n} - 1) \quad (\text{ד}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n} + (-1)^{n-1}} \quad (\text{ב}) \end{array}$$