



תרגיל 4 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} \right) \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \sin^2 \left( \frac{n^{2020}}{n+1} \right) + \cos^2 \left( \frac{n^{2020}}{n+1} \right)} \quad (\text{ב})$$

2. תהא  $(a_n)_{n=1}^\infty$  סדרה המקיימת  $0 \leq a_{m+n} \leq \frac{1}{2}(a_m + a_n)$  לכל  $m, n \in \mathbb{N}$ . הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$ .

3. (א) תהא  $(a_n)_{n=1}^\infty$  סדרה המקיימת  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = L > 0$ . האם  $(a_n)_{n=1}^\infty$  בהכרח מתכנסת במובן הרחב? נמקו!

(ב) הוכיחו את "משפט הפיצה": אם  $(a_n)_{n=1}^\infty$  סדרה המתכנסת במובן הרחב לאינסוף ו-  $(b_n)_{n=1}^\infty$  סדרה שעבורה קיים  $N$  כך שלכל  $n > N$  מתקיים  $b_n \geq a_n$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ .

4. תהא  $(a_n)_{n=1}^\infty$  סדרה מתכנסת ונגדיר סדר חדשה  $(b_n)_{n=1}^\infty$  ע"י  $b_n = \max \{a_1, \dots, a_n\}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ . הוכיחו כי גם  $(b_n)_{n=1}^\infty$  מתכנסת.

5. תהיינה  $(a_n)_{n=1}^\infty$  ו-  $(b_n)_{n=1}^\infty$  שתי סדרות המוגדרות באופן הבא:  $a_1, b_1 > 0$  קבועים נתונים, ולכל  $n \in \mathbb{N}$  נגדיר  $a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$  ו-  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ . הוכיחו כי שתי הסדרות מתכנסות ולאותו הגבול.

6. נגדיר סדרה  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  בעזרת נוסחת נסיגה:  $a_1 = 0$  ו-  $a_{2n} = \frac{1}{2}a_{2n-1}$ ,  $a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n}$ . מצאו את  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  ואת  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ .