תרגיל 3 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. הוכיחו את הגבולות הבאים ע"פ הגדרת הגבול:

(א) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{15n^2}{5n^2-1} = 3$ (ב) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+1}{510\sqrt{n}} = +\infty$ (ג) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+n^2-n^4\right) = -\infty$

2. חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שאינם קיימים:

(א) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(ב) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$

(ג) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin(n!)$

(ד) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^{n^2}}$

(ה) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

(ו) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n+1}{2n^2+n-2}$

(ז) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{\pi}+\frac{9}{\pi^2}+\ldots+\frac{3^n}{\pi^n}$

(ח) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

(ט) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-2021!}{2021n}$

(י) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^4+3n}-\sqrt{n^4-1}$

<u>פתרון:</u> (ב) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!(n+1-1)}{n!(n+1+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1$

(ג) מתקיים $\left|\sin(n!)\right| \le 1$ ו־$\frac{1}{n} \to 0$. ממשפט שהוכח בהרצאה, הגבול של סדרה חסומה כפול סדרה השואפת לאפס שווה לאפס. כלומר $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin(n!) = 0$.

(ד) $n^2 > 2n$ לכל $n \ge 2$, ולכן, לכל $n \ge 2$ מתקיים: $0 \le \frac{3^n}{2^{(n^2)}} \le \frac{3^n}{2^{2n}} = \frac{3^n}{(2^2)^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$ וממשפט הסנדוויץ' $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^{(n^2)}} = 0$.

(ה) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1}-n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$.

3. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) נניח ש $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

(ב) נניח ש $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(ג) נניח ש $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ וכן $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(ד) נניח ש $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ונסמן $b_n = \frac{1}{a_n}$ אזי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במוסן הרחב לאינסוף או למינוס אינסוף.

(ה) נניח ש $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

(ו) נניח ש $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ואילו $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת. אזי $(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת.

(ז) אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה אז $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

(ח) אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 2021$ אזי קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > 2020$.

(ט) אם $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} a_n$ אזי קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n \le b_n$.

(י) אם $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אזי שתי הסדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומות.

פתרון:

(א) נכון. מהגדרת הגבול, יהא $\varepsilon > 0$. קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$. לכן, לכל $\varepsilon > 0$, עבור N כנ״ל, מתקיים: $||a_n| - |a|| \le |a_n - a| < \varepsilon$ ולכן $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

(ב) לא נכון. עבור $a_n = (-1)^n$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} |(-1)^n| = 1$ אבל ל-a_n אין בכלל גבול.

(ג) לא נכון. עבור $a_n = -1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |1|$ אבל $\lim_{n\to\infty} a_n = -1 \ne 1$.

(ד) לא נכון. עבור $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ נקבל $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אבל $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} b_n$ לא קיים.

(ה) לא נכון. עבור $a_n = \frac{1}{n}$ נקבל $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אבל $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \ne 0$.

4. הוכיחו כי הסדרות הבאות מונוטוניות:

(א) $a_1 = \sqrt{2}$ ולכל $n \ge 1$ נגדיר $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

(ב) נגדיר $a_n = (2^n)\left(s_n - \sqrt{2}\right)$ כאשר $s_1 = 2$ ו- $s_{n+1} = \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{2}{s_n}\right)$.

רמז: הוכיחו תחילה ש $s_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(s_n - \sqrt{2}\right)\left(\frac{s_n - \sqrt{2}}{s_n}\right)$

פתרון: (א)

נראה באינדוקציה על n ש (a_n) מונוטונית עולה:

$2 \le 2 + \sqrt{2}$ מתכונות של סדר, לשים שורש על שני האגפים שומר על אי השיוויון, לכן:

$$a_1 = \sqrt{2} \le \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_2$$

נניח ש $a_{n-1} \le a_n$:

$$\sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}} = a_{n-1} \le a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}$$

$\Leftarrow$

$$a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} = \sqrt{2 + a_{n-1}} \le \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}} = a_{n+1}$$

(ב)

נוכיח את הזהות:

$$s_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}(s_n+\frac{2}{s_n})-\sqrt{2}=\frac{1}{2}(s_n-2\sqrt{2}+\frac{2}{s_n})=\frac{1}{2}(\frac{s_n^2-2\sqrt{2}s_n+2}{s_n})=\frac{1}{2}(\frac{(s_n-\sqrt{2})^2}{s_n})=\frac{1}{2}(s_n-\sqrt{2})(\frac{s_n-\sqrt{2}}{s_n})$$

נזכיר ש $a_n=2^n(s_n-\sqrt{2})$.

נראה שלכל n **מתקיים:** $s_n>\sqrt{2}$:

$s_1=2>\sqrt{2}$**, באינדוקציה, נקבל מאי שיווין הממוצעים שלכל** $n>1$:

$$s_{n+1}=\frac{1}{2}(s_n+\frac{2}{s_n})>\sqrt{s_n\cdot\frac{2}{s_n}}=\sqrt{2}$$

(נניח בהנחת האינדקוציה שיש אי שיוויון ממש ונקבל אי שיוויון ממש כי $s_n=\sqrt{2}\Leftrightarrow s_n=\frac{2}{s_n}$**).**

ולכן לכל n **מתקיים** $0<\frac{\sqrt{2}}{s_n}<1 \Leftarrow 0<1-\frac{\sqrt{2}}{s_n}<1$

בפרט הראינו ש $a_n>0$ **לכל** n.

נראה ש (a_n) **מונוטונית יורדת:**

$$a_{n+1}=2^{n+1}(s_{n+1}-\sqrt{2})=2^{n+1}\cdot\frac{1}{2}(s_n-\sqrt{2})(\frac{s_n-\sqrt{2}}{s_n})=a_n(\frac{s_n-\sqrt{2}}{s_n})=a_n(1-\frac{\sqrt{2}}{s_n})\le a_n$$