# תרגיל 3 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. הוכיחו את הגבולות הבאים ע"פ הגדרת הגבול:

(א) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{15n^2}{5n^2-1}=3$

(ב) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+1}{510\sqrt{n}}=+\infty$

(ג) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+n^2-n^4\right)=-\infty$

2. חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שאינם קיימים:

(א) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

(ב) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$

(ג) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin(n!)$

(ד) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{2^{n^2}}$

(ה) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

(ו) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{2n^2+n-2}$

(ז) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{\pi}+\frac{9}{\pi^2}+\ldots+\frac{3^n}{\pi^n}$

(ח) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

(ט) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-2021!}{2021n}$

(י) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^4+3n}-\sqrt{n^4-1}$

3. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) נניח ש $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

(ב) נניח ש $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

(ג) נניח ש $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$ וכן $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אזי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

(ד) נניח ש $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ונסמן $b_n=\frac{1}{a_n}$ אזי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב לאינסוף או למינוס אינסוף.

(ה) נניח ש $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$.

(ו) נניח ש $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ואילו $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת. אזי $(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת.

(ז) אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה אז $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

(ח) אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2021$ אזי קיים $N$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n>2020$.

(ט) אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leq\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ אזי קיים $N$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n\leq b_n$.

(י) אם $(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אזי שתי הסדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומות.

4. הוכיחו כי הסדרות הבאות מונוטוניות:

(א) $a_1=\sqrt{2}$ ולכל $n\geq 1$ נגדיר $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$.

(ב) נגדיר $a_n=(2^n)\left(s_n-\sqrt{2}\right)$ כאשר $s_1=2$ ו- $s_{n+1}=\frac{1}{2}\left(s_n+\frac{2}{s_n}\right)$.

רמז: הוכיחו תחילה ש $s_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(s_n-\sqrt{2}\right)\left(\frac{s_n-\sqrt{2}}{s_n}\right)$