אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה למתמטיקה

בחינה בחדו"א 1 למדמ"ח והנדבת תוכנה, תאריך 20.03.2023, מועד א'

מספר הקורס: 201-1-2361, תוכנית אקדמיזציה לטייס

המרצה: פרופ' ארקדי ליידרמן

- <u>משך הבחינה: 3 שעות</u>
- <u>יש לענות על כל 5 שאלות. משקל של כל שאלה הוא 20 נקודות.</u>
- <u>יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!</u>
- <u>אין להשתמש בחומר עזר.</u>
- <u>בכל שאלה/סעיף (פרט לסעיף הבונוס) ניתן לכתוב **"לא יודע"** ולקבל 20% מהנקודות.</u>
- <u>שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.</u>

מספר הנבחן ____________________

<u>שאלה 1.</u> (א) (5 נקודות) תרשמו את הניסוח של קריטריון קושי עבור התכנסות סדרות.

(ב) (15 נקודות) נניח כי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את התכונה הבאה: $|a_{n+1}-a_n| \le \dfrac{1}{(n+1)^2}$ לכל n.

הוכיחו שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול סופי.

<u>שאלה 2.</u> (א) (5 נקודות) תרשמו את הניסוח של מבחן לייבניץ.

(ב) (15 נקודות) יהי $\alpha > 0$. חקרו את ההתכנסות (בהחלט או בתנאי) של טור מספרי $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln(n)}{n^{\alpha}}$.

<u>שאלה 3.</u> (20 נקודות) פונקציה $f(x)$ מוגדרת על ידי הנוסחה $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

חקרו רציפות של פונקציה $f(x)$. אם x_0 היא נקודת אי-רציפות קבעו מהו הסוג אי-רציפות בה.

<u>שאלה 4.</u> נתונה המשוואה $e^x-\cos x-a=0$, כאשר $a>0$.

(א) (10 נקודות) הוכיחו כי לכל קבוע a יש למשוואה לפחות שורש אחד בתחום $[0,\infty)$.

(ב) (10 נקודות) הוכיחו כי לכל קבוע a שורש של משוואה יחיד בתחום $[0,\infty)$.

<u>שאלה 5.</u> (א) (5 נקודות) תרשמו את הניסוח של משפט על נוסחת טיילור עם שארית בצורה של פיאנו.

(ב) (15 נקודות) נתון כי קיים גבול סופי $C=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-ax^2-bx}{x^3}$.

מצאו את הערכים a,b,C.

בהצלחה!

20.03.2023

פתרון של מבחן בחדו"א, 20.03.2023

<u>שאלה 1</u>

ידוע כי $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$, ולכן בעצם

$|a_{n+1}-a_n| < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

כאשר שאלה זהה לשאלה שהיתה במבחן. לכל $m>n$ מתקיים כי

$$|a_m-a_n| = |a_m-a_{m-1}+a_{m-1}-a_{m-2}+\ldots+a_{n+1}-a_n| \le$$

$$\le |a_m-a_{m-1}|+|a_{m-1}-a_{m-2}|+\ldots+|a_{n+1}-a_n| \le$$

$$\le \frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m-2}-\frac{1}{m-1}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}-\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$$

לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$ על פי עקרון ארכימדס

ולכן $|a_m-a_n|<\frac{1}{n}<\varepsilon$ מתקיים $\forall m>n>n_0$

כלומר $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}$, מתקיים קריטריון קושי להתכנסות של סדרות.

<u>שאלה 2</u>

נוכיח קודם כי הטור מתכנס בהחלט עבור $\alpha>1$.

אם $\alpha>1$ אז נסמן $\alpha=1+\gamma$, $\gamma>0$.

ידוע כי $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n^{\gamma/2}}=0$, ולכן $\exists n_0\in\mathbb{N}$ $\forall n>n_0$ מתקיים $\ln n<n^{\gamma/2}$

ולכן

$$\frac{\ln(n)}{n^{\alpha}} < \frac{1}{n^{1+\frac{\gamma}{2}}} \quad \forall n>n_0 \text{ מתקיים}$$

מאחר ש $p=1+\frac{\gamma}{2}>1$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתכנס כאשר $p>1$

אז הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^{\alpha}}$ גם מתכנס על פי מבחן ההשוואה.

אם $0<\alpha\le1$ אז מתקיים

$$\frac{1}{n} \le \frac{\ln(n)}{n^{\alpha}} \quad \text{לכל } n\ge3 \text{ ולכן}$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^{\alpha}}$ מתבדר עבור $0<\alpha\le1$.

נוכיח כי אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n^{\alpha}}$ מתכנס על פי מבחן לייבניץ ולכן הטור מתכנס בתנאי.

על פי מבחן לייבניץ צריך לבדוק 2 תנאים:

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n^\alpha}=0$; 2) סדרה $\left\{\frac{\ln(n)}{n^\alpha}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת

החל מ n מסוים.

1) ידוע 2) נגדיר פונקציית עזר $f(x)=\frac{\ln x}{x^\alpha}$

ונראה, כי פונקציה $f(x)$ יורדת עבור x מספיק גדול

נגזרת $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x^\alpha}\right)'=\frac{\frac{1}{x}x^\alpha-\ln x\cdot\alpha x^{\alpha-1}}{x^{2\alpha}}=\frac{1-\alpha\cdot\ln x}{x^{\alpha+1}}$

מאחר ש $\alpha>0$ ו $\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty$, אז $1-\alpha\ln x<0$

עבור x מספיק גדול.

ובכן, $f'(x)<0 \Leftarrow f(x)$ יורדת $\Leftarrow \left\{\frac{\ln(n)}{n^\alpha}\right\}_{n=1}^{\infty}$

סדרה יורדת ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^\alpha}$ מתכנס על פי

מבחן לייבניץ

<u>שאלה 3</u> ישנם 3 מיקרים.

$x=0$, $e^{nx}=1$ ולכן $f(0)=\frac{1}{2}$.

$x>0$, $\lim_{n\to\infty}e^{nx}=\infty$, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{e^{nx}}+1}{\frac{1}{e^{nx}}+1}=1$.

$x<0$, $\lim_{n\to\infty}e^{nx}=0$, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+0}{1+0}=x$

ובכן, $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ \frac{1}{2}, & x=0\\ x, & x<0\end{cases}$.

פרט $x=0$ נקודה

אי-רציפות מסוג ראשון

שאלה 4

(א) נתבונן בפונקציה $a>0$, $f(x)=e^x-\cos x-a$. ברור ש $f(0)=1-1-a=-a<0$
וגם $\lim_{x\to\infty}\left(e^x-\cos x-a\right)=\infty$, כלומר קיים מספר b מספיק גדול כך ש $f(b)>0$.
נתבונן ב- $f(x)$ בקטע $[0,b]$: מתקיים $f(b)>0$ וגם $f(0)<0$. לפי משפט ערך הביניים לפונקציה רציפה, מסיקים שבקטע $[0,b]$ קיים לפחות שורש אחד למשוואה $f(x)=0$.
(ב) נבדוק תחומי עלייה וירידה של $f(x)$: $f'(x)=e^x+\sin x$. ברור כי

$$|\sin x|\le 1,\quad \forall x>0\ \ e^x>1\text{, כלומר }\left.\begin{array}{r}\forall x>0\ \ f'(x)>0\\ f'(0)=1>0\end{array}\right\}\Rightarrow \forall x\ge 0\ \ f'(x)>0.$$

מכאן נובע ש $f(x)$ עולה ממש בקרן $[0,\infty)$, לכן היא מקבלת כל ערך פעם אחת בלבד,
לכן גם ערך 0 מתקבל פעם אחת.

שאלה 5

<u>דרך ראשונה</u>: נשתמש בנוסחת טיילור.
נרשום נוסחת טיילור עבור פונקציות בשאלה:

$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ וכן $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$. לכן

$$e^x\sin x=x-\frac{x^3}{6}+x^2+\frac{x^3}{2}+o(x^3)=x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

כלומר:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-ax^2-bx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-b)x+(1-a)x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}.$$

גבול זה שונה מ $\pm\infty$ אם ורק אם $a=1$, $b=1$, ובמקרה זה הגבול שווה ל- $\frac{1}{3}$.

<u>דרך שנייה</u>: נשתמש בכלל לופיטל. כל הפונקציות גזירות אינסוף פעמים.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-ax^2-bx}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\sin x+\cos x)-2ax-b}{3x^2}$$

גבול שונה מ $\pm\infty$ רק במקרה שהמונה מתאפס כאשר $x=0$, מכאן $b=e^0=1$.
אם $b=1$ נמשיך לפי כלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\sin x+\cos x)-2ax-1}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cos x-2a}{6x}$$

שוב מונה צריך להתאפס כאשר $x=0$, לכן $a=1$. במקרה זה נמשיך לפי כלל לופיטל ונקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cos x-2}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x(\cos x-\sin x)}{6}=\frac{1}{3}$$