המכללה האקדמית אחוה

מדור בחינות

מס' הנבחן: ____________

ענו על 4 השאלות מתוך 5.
כל שאלה שווה 25 נקודות.

תאריך הבחינה : 5.08.2008
שם המורה : ד"ר ארקדי ליידרמן
מבחן ב : חדו"א א2
מס' הקורס : 201-1-0021
מיועד לתלמידי : מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה : א', סמ' : ב', מועד : ב'
משך הבחינה : 3 שעות
חומר עזר : דף נוסחאות אחד (2 עמודים) בגודל סטנדרטי, מחשב כיס פשוט עם צג קטן

כל התשובות חייבות להיות מלאות ומנומקות היטב.

השאלות:

1. בעזרת תכונות של אינטגרל מסוים חשב $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$.

2. עקומה סגורה נתונה בקואורדינטות פולריות: $\{r=a\sin^3\frac{\varphi}{3},\quad 0\le\varphi\le 3\pi\}$ כאשר $a>0$ קבוע.

שרטט את הסקיצה של העקומה וחשב את אורכה.

3. יהי טור חזקות $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(2^n+3^n)}$

א) (10 מקודות) חשב את רדיוס ההתכנסות של טור.
ב) (15 נקודות) חקור את ההתכנסות בקצוות של תחום ההתכנסות.

4. תהי $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{\alpha}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ כאשר α קבוע.

א) (10 נקודות) מצא כל α כך שפונקציה $f(x,y)$ רציפה בנקודה $(0,0)$.
ב) (15 נקודות) מצא כל α כך שפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$

5. נתונה הפונקציה $f(x,y)=e^{x-2y}-xe^{-y}$.

א) (10 נקודות) מצא את כל הנקודות של אקסטרמום מקומי של פונקציה $f(x,y)$.
ב) (15 נקודות) מצא את הערך הכי גדול ואת הערך הכי קטן של פונקציה $f(x,y)$ בריבוע $\{(x,y): 0\le x\le 4;\ 0\le y\le 4\}$.

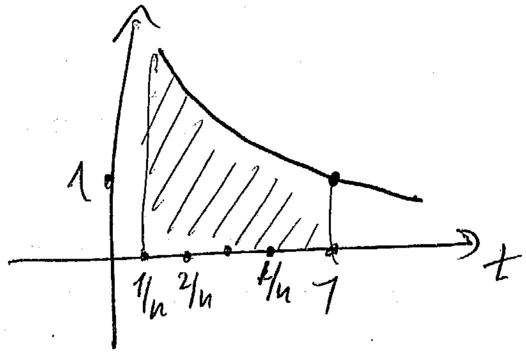
-בהצלחה-

שאלה 1 (פתרון בחינה 2 חדו"א, 2001 מועד א')

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{1/3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^{1/3}}$$

נגדיר פונקציה על $t\in(0,1]$, $f(t)=\frac{1}{t^{1/3}}$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{1/3}}\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{1} \frac{1}{t^{1/3}}\,dt = \frac{3}{2}$$



$$\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^{1/3}}}_{\text{סכום תחתון}} \le \int_{1/n}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt < \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^{1/3}}}_{\text{סכום עליון}}$$

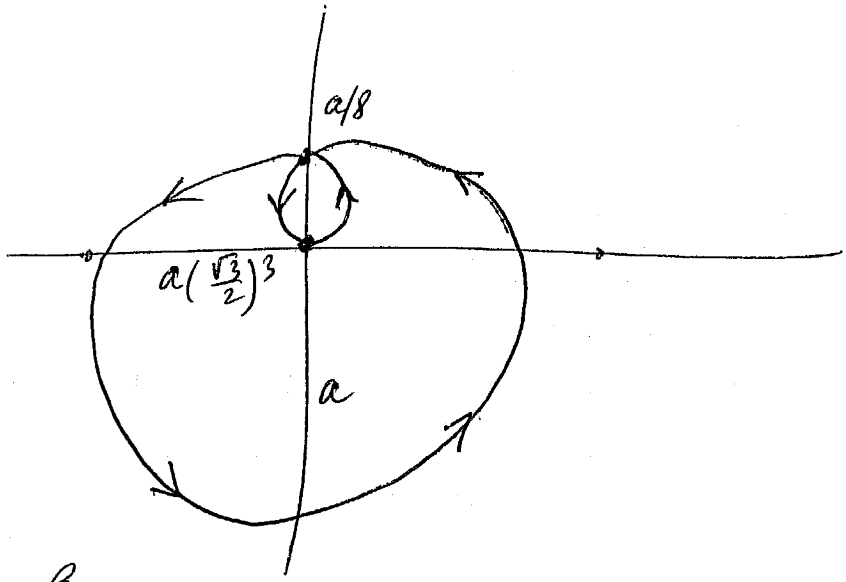
הפרש בין סכום עליון וסכום תחתון הוא:

$$\frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{n}-1\right) = \frac{1}{n^{2/3}} - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

לכן הגבול שווה לאינטגרל:

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{1/3}}\,dt = \boxed{\frac{3}{2}}$$

2 [illegible]



$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi$$

$$r'(\varphi) = a \cdot 3 \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cdot \frac{1}{3} \cos \frac{\varphi}{3} = a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}$$

$$[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2 = a^2 \sin^4 \frac{\varphi}{3} \left(\sin^2 \frac{\varphi}{3} + \cos^2 \frac{\varphi}{3} \right) =$$

$$= a^2 \sin^4 \frac{\varphi}{3}$$

$$L = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 \sin^4 \frac{\varphi}{3}}\, d\varphi = \int_0^{3\pi} a \sin^2 \frac{\varphi}{3}\, d\varphi =$$

$$= \frac{a}{2} \int_0^{3\pi} \left[1 - \cos \frac{2\varphi}{3}\right] d\varphi = \boxed{\frac{3}{2} \pi a}$$

שאלה 3 (דומה לשאלה 1 (סעיף 5), תרגיל 8

א) $a_n = \frac{1}{n(2^n+3^n)}$.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\,\frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^n+2^n} =$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}}_{1}\ \lim_{n\to\infty}\frac{3+2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 3$$

ב) בקצה $x=3$ מקבלים טור חיובי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\frac{3^n}{2^n+3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

שקול לטור הרמוני ולכן מתבדר.

בקצה $x=-3$ מקבלים טור עם סימנים מתחלפים.
נראה שתנאים של משפט לייבניץ מתקיימים.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\frac{3^n}{2^n+3^n} = 0$$

מונוטוניות: נראה ש $c_n > c_{n+1}$, כלומר

$$\frac{1}{n}\,\frac{3^n}{2^n+3^n} > \frac{3^{n+1}}{(n+1)(2^{n+1}+3^{n+1})} \Longleftrightarrow$$

$$n(2^n+3^n)3^{n+1} < (n+1)(2^{n+1}+3^{n+1})3^n \Longleftrightarrow$$

$$3n\cdot 2^n + n\cdot 3^{n+1} < 2(n+1)2^n + (n+1)3^{n+1} \Longleftrightarrow$$

$$(n-2)2^n < 3^{n+1} \Longleftrightarrow \frac{n-2}{3} < \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

נכון לכל n. ולכן טור מתכנס בקצה $x=-3$
ומתבדר בקצה $x=3$.

<u>שאלה 4</u> (פתרון לשאלה ממבחן 2006, מועד ב')

(א) נסמן $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. $\begin{cases}x\to0\\y\to0\end{cases}\iff\rho\to0$

$$\alpha>0\iff\lim_{\rho\to0}\rho^{2\alpha}\sin\left(\frac{1}{\rho}\right)=0$$

כי $\left|\sin\left(\frac{1}{\rho}\right)\right|\le1$ ו $\rho^{2\alpha}\to0$.

אם $\alpha=0$ אז גבול לא קיים ואם $\alpha<0$ אז גבול שווה ל ∞. ולכן פונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$ כאשר $\alpha>0$.

(ב)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}|x|^{2\alpha-1}\cdot\sin\left(\frac{1}{|x|}\right)=0$$

אם ורק אם $2\alpha-1>0\iff\alpha>\frac12$. אחרת אין גבול סופי.

באופן דומה $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ אם ורק אם $\alpha>\frac12$.

מספר שלמהו

$$\Delta f=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\cdot\rho=\rho^{2\alpha}\sin\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

מפה מקבלים ש

$$\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=\rho^{2\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

שום

$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=0$ כאשר $\alpha>\frac12$

ולכן פונקציה דיפרנציאבילית כאשר $\alpha>\frac12$.

שאלה 5

(א)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-2y} - e^{-y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2e^{x-2y} + xe^{-y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-y} = 1 \\ -2e^{x-y} + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ -2+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

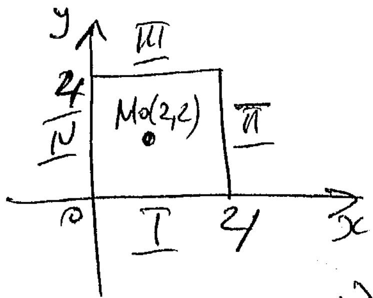
נקודה זו חשודה לקיצון.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x-2y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2e^{x-2y} + e^{-y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4e^{x-2y} - xe^{-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = e^{-2} \\ B = -e^{-2} \\ C = 2e^{-2} \end{array}$$

$$\Delta = AC - B^2 = 2e^{-4} - e^{-4} = e^{-4} > 0$$

$$A > 0$$

לכן נקודה $M_0(2,2)$ היא נקודה של מינימום מקומי.



(ב)

$M_0(2,2)$ שייכת לתחום

נחקור על השפה.

I: $y=0$, $x\in[0,4]$

$$g(x)=f(x,0)=e^{x}-x$$

$$g'(x)=e^{x}-1=0 \iff x=0$$

$$g(0)=1,\quad g(4)=e^{4}-4$$

II: $x=4$, $y\in[0,4]$

$$g(y)=f(4,y)=e^{4-2y}-4e^{-y}$$

$$g'(y)=-2e^{4-2y}+4e^{-y}=0 \iff e^{4-y}=2 \iff y=4-\ln 2$$

יש לנו נקודה $M_1(4,4-\ln 2)$ לקיצון.

III: $y=4$, $x\in[0,2]$

$$g(x)=f(x,4)=e^{x-8}-xe^{-4}$$

$$g'(x)=e^{x-8}-e^{-4}=0 \iff x=4$$

נקודת קצה.

$$g(0)=e^{-8},\quad g(4)=e^{-4}-4e^{-4}=-3e^{-4}$$

IV: $x=0$, $y\in[0,4]$

$$g(y)=f(0,y)=e^{-2y},\quad g'(y)\neq 0$$

$$f(2,2)=-e^{-2}$$

תשובות:

$\max f=e^{4}-4$

$\min f=-e^{-2}$ מוחלטים.