

תדו"א 2

עבודת בית 5. נקודות קיצון של פונקציות במשתנים רבים. אינטגרלים כפולים.

שאלה 1.

מצאו את נקודות האקסטרומום המקומי של פונקציה $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

שאלה 2.

הוכיחו את האי שוויון $x^2y + \frac{1}{2}y^3 \leq x^2 + y^2$ כאשר מתקיים ש- $x^2 + y^2 \leq \frac{3}{2}$.
(רמז: להגדיר פונקציית עזר ולמצוא את ערכה הגדול ביותר בתחום: $\left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{2}{3} \right\}$.)

שאלה 3. בעזרת שיטה של כופלי לגרנז' מצאו שטח מקסימלי של מלבן שחסום במעגל עם רדיוס $R > 0$.

שאלה 4.

מצוא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה $f(x, y) = \sqrt{3}xy + x^2$ בתחום: $x^2 + y^2 \leq 1$. יש לבצע חקירה על השפה של תחום על ידי שיטת כופלי לגרנז'.

שאלה 5.

חשבו את האינטגרלים הבאים במלבן $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$
(א) $\iint_D x e^{xy} dx dy$; $a = c = 0, b = d = 1$ (ב) $\iint_D x \cos^2(y) dx dy$; $a = -2, b = 3, c = 0, d = \frac{\pi}{2}$

שאלה 6.

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרל כפול $\int_1^2 \left(\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$

שאלה 7.

חשבו את האינטגרל $\iint_D (2 - 3x + xy) dx dy$ בשני דרכים (גם בסדר אינטגרציה הפוך),
כאשר D הינו המשולש עם הקודקודים $(0, 0)$; $(1, 0)$; $(1, 3)$.

שאלה 8.

מצאו את הנפח הכלוא בין המשטחים $z = x^2 + y^2$ ו- $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ כאשר $x^2 + y^2 \leq 4$.

שאלה 9.

בעזרת החלפת משתנים המתאימה חשבו את האינטגרל $\iint_D \frac{y}{x} dx dy$ כאשר תחום D הינו התחום הכלוט על ידי

העקומות $x^2 - y^2 = 1$; $y = 0$; $x^2 - y^2 = 4$; $y = \frac{1}{2}x$.

שאלה 10.

חשבו את האינטגרל הכפול הלא אמתי $\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$ $\lim_{R \rightarrow \infty}$ ובעזרתו

מצאו את הערך המדויק של האינטגרל הלא אמתי $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.