חדו"א 2

פתרונות של עבודת בית 4.

שאלה 1 (א) $\forall x,y\ 0 \le \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x^3|}{x^2+y^2} + \frac{|y^3|}{x^2+y^2} \le |x|+|y|$

לכן עפ"י משפט "סנדוויץ'"

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

(ב) במסלול $y=0$ מקבלים כי

$$\lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^3} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

אבל במסלול $y=-x+x^3$ מקבלים כי

$$\lim_{\substack{y=-x+x^3\\ x\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^3+(-x+x^3)^3} = \lim_{x\to 0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + 3x^5 - 3x^{10} + x^{27}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3-3x^5+x^{22}}$$

$$= \frac{1}{3} \neq 0$$

לכן $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ לא קיים

שאלה 2 (א) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{=0}{f(x,0)} - \overset{=0}{f(0,0)}}{x} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\overset{=0}{f(0,y)} - \overset{=0}{f(0,0)}}{y} = 0$$

המספר שלנו, של פונקציה

$$f(x,y) - \overset{0}{f(0,0)} = 0\cdot x + 0\cdot y + \varepsilon \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varepsilon = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{y}{x^2}\right) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{x}{y^2}\right)$$

באלכסון $x=y$ מקבלים כי $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{|x|\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

לכן $\varepsilon = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\, 2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{}$ לא קיים גבול

אין $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \varepsilon = 0$, לכן אין דיפרנציאביליות בנק' $(0,0)$.

ב) כמו בסעיף א' מקבלים כי

$$\varepsilon = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{y}{x^2}\right) + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{x}{y^2}\right)$$

לכן

$$|\varepsilon| \le |x| + |y| \quad \forall x,y$$

ולכן $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \varepsilon(x,y) = 0$, ז"א f כן דיפרנציאבילית בנק' $(0,0)$.

הסבר: $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |x|$, $|\sin\alpha| \le 1$ לכל α

שאלה 3

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3}-0}{x} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{y^3}-0}{y} = 1$$

תוספת שלמה

$$\sqrt[3]{x^3+y^3} - 0 = 1\cdot x + 1\cdot y + \varepsilon\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

במסלולים $x=0$ וגם $y=0$ ε שווה אפס.

אבל במסלול $y=x$ מקבלים כי

$$\sqrt[3]{x^3+y^3} = \sqrt[3]{2x^3} = \sqrt[3]{2}\,x$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}\,|x|$$

$$\varepsilon = \frac{(\sqrt[3]{2}-2)\,x}{2\sqrt{2}\,|x|} \not\xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

לכן $f(x,y)$ לא דיפרנציאבילית ב $(0,0)$

שאלה 4

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x^3|}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\pm |x|^{1/2}\right) = 0$$

מטעמי סימטריה $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$$\sqrt{|x^3+y^3|} = 0\cdot x + 0\cdot y + \varepsilon \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}}$$

בשאלה 1 (א) הוכחנו כי $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$

לכן $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \varepsilon = 0$, ז"א $f(x,y)$ כן דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

שאלה 5

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0,0) - f(0,0,0)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \left\{ \text{נסמן } \frac{1}{x} = t \right\}$$

$$= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t^3}{e^{t^2}} = 0 \quad \left(\text{בעזרת כלל לופיטל}\right)$$

ובאותו אופן מסימטריה

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}} - 0 = 0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z + \varepsilon \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$$

$$t = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\left\{ \begin{matrix} x\to 0 \\ y\to 0 \\ z\to 0 \end{matrix} \right. \iff x^2+y^2+z^2 \to \infty$$

לכן

$$\lim \varepsilon = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{1}{t}} = 0$$

ז"א $f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית בנ' $(0,0,0)$

—3—

שאלה 6

$\forall x,y \quad 0 \le |f(x,y)| \le x^2+y^2$

לכן עפ"י "סנדוויץ'"

$f(0,0)=0$

$0 \le \left| \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} \right| \le \left| \frac{x^2}{x} \right| = |x|$

לכן $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$ וגם $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

תוספת שלמה

$|f(x,y)-f(0,0)| = |0\cdot x + 0\cdot y + \varepsilon\sqrt{x^2+y^2}| \le x^2+y^2$

לכן

$0 \le |\varepsilon| \le \sqrt{x^2+y^2}$

ולכן שוב עפ"י "סנדוויץ'" $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \varepsilon = 0$

מ"ש $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.

שאלה 7 מחפשים נקודת השקה (x_0,y_0,z_0) שנמצאת על פני המשטח $z=x^2+y^2$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=2x \, ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y$

לכן המישור המשיק הוא

$z-z_0 = 2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)$

כאשר ~~$z_0=(x_0)^2+(y_0)^2$~~

המישור המקביל לפי הנתון הוא

$z-1=-1(x)-1(y)$

לכן $x_0=y_0=-\frac{1}{2}$, ומכאן $z_0=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

ומישור הוא

$z-\frac{1}{2}=-1\left(x+\frac{1}{2}\right)-1\left(y+\frac{1}{2}\right)$

כ"א, כלומר: $x+y+z=-\frac{1}{2}$ משוואת המישור המשיק המבוקש.

שאלה 8

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cos v+\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)\sin v=$$

$$=\frac{-y}{x^2+y^2}\cos v+\frac{x}{x^2+y^2}\sin v=$$

$$=\frac{-u\sin v}{u^2}\cos v+\frac{u\cos v}{u^2}\sin v=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=$$

$$=\frac{-y}{x^2+y^2}\cdot(-u\sin v)+\frac{x}{x^2+y^2}(u\cos v)=$$

$$=\frac{u^2\sin^2 v}{u^2}+\frac{u^2\cos^2 v}{u^2}=\sin^2 v+\cos^2 v=1$$

שאלה 9

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1\cdot f(t)+x f'(t)(-2x)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x f'(t)(2y)$$

$$\frac{1}{yz}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial y}+xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{1}{yz}\left(x^3 f'(t)2y+\right.$$

$$\left.+x\cdot y f(t)-2x^3 y f'(t)\right)=$$

$$=\frac{yz}{yz}=1$$ חלוקה:

שאלה 10 נתון | $t = \frac{y}{x}$.
על פי כלל שרשרת

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi'_t \, t'_y = \varphi'(t)\frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi'_t \cdot t'_x = \varphi'(t)\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \varphi''(t)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)^2 + \varphi'(t)\,\frac{2y}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \varphi''(t)\left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \varphi''(t)\left(-\frac{y}{x^2}\right)\frac{1}{x} + \varphi'(t)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$ | IO N

$$= \varphi''(t)\left(-\frac{y}{x}\right)^2 + \varphi'(t)\frac{2y}{x} + 2\varphi''(t)\left(-\frac{y}{x}\right) + \varphi''\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$$