

## תדו"א 2

עבודת בית 4. פונקציות של משתנים רבים. רציפות ודיפרנציאביליות.

שאלה 1. מצאו גבול (אם קיים)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  , כאשר

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5}{x^3 + y^3}, & x \neq -y \\ 0, & x = -y \end{cases} \quad (\text{ב}) ; f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (\text{א})$$

### שאלה 2.

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{y}{x^2}\right) + y \sin\left(\frac{x}{y^2}\right), & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \vee y = 0 \end{cases} \quad (\text{א})$$

הוכיחו כי פונקציה לא דיפרנציאבילית בנקודה  $(0,0)$ .

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{y}{x^2}\right) + y^2 \sin\left(\frac{x}{y^2}\right), & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \vee y = 0 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

הוכיחו כי פונקציה כן דיפרנציאבילית בנקודה  $(0,0)$ .

### שאלה 3.

הוכיחו כי פונקציה לא דיפרנציאבילית בנקודה  $(0,0)$ .  $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

### שאלה 4.

הוכיחו כי פונקציה כן דיפרנציאבילית בנקודה  $(0,0)$ .  $f(x,y) = \sqrt{|x^3 + y^3|}$

### שאלה 5.

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}}, & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

דיפרנציאבילית בנקודה  $(0,0,0)$  ?

### שאלה 6.

תהי פונקציה  $f(x,y)$  מקיימת את התכונה הבאה:  $|f(x,y)| \leq x^2 + y^2$  לכל נקודה  $(x,y)$ . הוכיחו על פי הגדרה שפונקציה  $f(x,y)$  דיפרנציאבילית בנקודה  $(0,0)$ .

### שאלה 7.

מצאו משוואת המישור המשיק למשטח  $z = x^2 + y^2$  המקביל למישור  $x + y + z = 1$ .

שאלה 8. חשבו  $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ , כאשר  $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), x \neq 0$ ,  $y = u \sin v, x = u \cos v$ .

### שאלה 9.

תהי  $f(t)$  פונקציה גזירה. נגדיר פונקציה  $z = x f(y^2 - x^2)$ . מצאו את הערך של ביטוי  $\frac{1}{yz} \left( x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + xy \frac{\partial z}{\partial x} \right)$  האם הערך זה תלוי ב-  $x, y$ ?

### שאלה 10.

בניח כי פונקציה  $\varphi(t)$  גזירה פעמיים. הוכיחו כי פונקציה  $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

מקיימת את השוויון