פתרונות של עבודת בית 3

שאלה 1

$$\int_0^\infty x^{11}e^{-x^4}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x^4}(x^4)^2\,d\left(\tfrac{1}{4}x^4\right) =$$

(הצבה $x^4=t$)

$$= \frac{1}{4}\lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-t}t^2\,dt = \frac{1}{4}\left(-\lim_{c\to\infty}\int_0^c t^2\,d(e^{-t})\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2}$$ (בחלקים)

שאלה 2

$x\geq 1$; $f(x)=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$, $g(x)=\frac{1}{x}$

2 פונקציות חיוביות

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1/x}} = 1$$

אינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ מתבדר, לכן על פי מבחן השוואה גם אינטגרל $\int_1^\infty f(x)dx$ מתבדר.

שאלה 3

בלי הגבלת הכלליות אפשר להניח כי $x\geq 1$.

נגדיר

$$g(x) = \frac{(x^5)^{1/6}}{(x^{17})^{\frac{1}{9}}} = \frac{1}{x^{1+\frac{1}{18}}}$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, אינטגרל $\int_1^\infty g(x)dx$ מתכנס כי $p=1+\frac{1}{18}>1$, לכן, על פי מבחן השוואה גם $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס.

שאלה 4

בשאלה זאת מדובר באינטגרל לא אמיתי מסוג 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} = \lim_{x\to\pi}\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} = \infty$$

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} f(x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)dx$$

על פי הגבול המופלא

$\sin x \sim x,\ x\to 0$

לכן $$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx \sim \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^{1/3}}\,dx$$

מתכנס על פי מבחן ההשוואה $\left(\frac{1}{3}<1\right)$.

$\sin(x\pm\pi) = -\sin x \sim -x,\quad x\to 0$

לכן $$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx = -\int_{-\pi/2}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx$$

מתכנס גם כן. אזי, האינטגרל מתכנס.

<u>שאלה 5</u> יש לחקור $\int_0^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{\infty} f(x)dx$

כי אינטגרל זה מתכנס אם״ם 1 וגם 2.

אם $x\to 0$ אזי $\sin\sqrt{x}\sim\sqrt{x}$

לכן, $e^x-1\sim x$

$$f(x) = \frac{e^x \sin\sqrt{x}}{(x^2+1)(e^x-1)} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}},\ x\to 0$$

אינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתכנס, לכן על פי מבחן ההשוואה

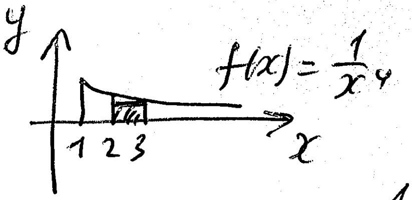
גם $\int_0^1 f(x)dx$ מתכנס. הגורם נשים לב כי

$\frac{e^x}{e^x-1} = \frac{1}{1-e^{-x}}$, $|\sin\sqrt{x}|<1$, לכן

$$0 \le |\sin\sqrt{x}|\frac{e^x}{(x^2+1)(e^x-1)} \le \frac{1}{x^2(1-e^{-x})} \sim \frac{1}{x^2},\ x\to\infty$$

$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ מתכנס, לכן התשובה: $\int_0^{\infty} f(x)dx$ מתכנס.

שאלה 6



נגדיר פונקציה $f(x)=\frac{1}{x^4}$ בתחום $[1,\infty)$.

פונקציה $f(x)$ מונוטונית יורדת ל-0 בתחום, לכן

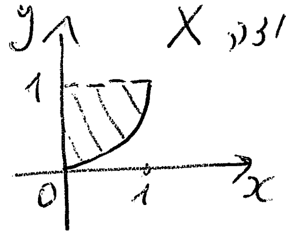
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=1+\frac{1}{2^4}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^4}<1+\frac{1}{16}+\int_2^{\infty}\frac{1}{x^4}\,dx=$$

$$=1+\frac{1}{16}-\frac{1}{3}x^{-3}\Big|_2^{\infty}=1+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}=1+\frac{5}{48}$$

שאלה 7

(א)

קבוצה X

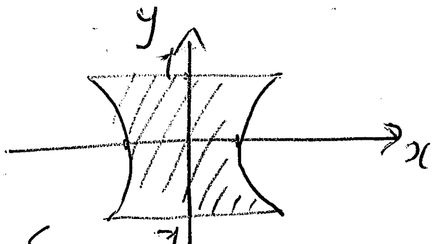


$bd(X)$

שפה של קבוצה X מורכבת מ-3 חלקים
קטע $x=0$, קטע $y=1$ וחלק של פרבולה.
קטע $x=0$ כן מוכל בקבוצה, קטע $y=1$ לא מוכל,
לכן קבוצה X לא סגורה ולא פתוחה.

$$cl(X)=X\cup bd(X)$$
$$int(X)=X\setminus bd(X)$$

(ב)



פה קבוצה X פתוחה כי כל נקודה של X פנימית. שפה $bd(X)$ מורכבת מ-4 קווים
$cl(X)=X\cup bd(X)$. $int\,X=X$.

שאלה 8

נתבונן בנקודה $(0,y)$ כאשר $y\in[-1,1]$ כלשהו. קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,1)$ כך ש $x_n \to 0$ ו $\sin\frac{1}{x_n}=y$ לכל n. לכן $(0,y)\in cl(X)$

$$cl(X)=X\cup\{(0,y):y\in[-1,1]\}\subset\mathbb{R}^2$$

משום ש X קבוצה לא סגורה אז X לא קומפקטית. לעומת זאת $cl(X)$ קבוצה סגורה וחסומה, לכן $cl\,X$ קבוצה קומפקטית.

הוכחה של כך שקבוצה $cl(X)$ אינה קשירה מסילתית.

נסמן נקודות $A(0,0)$, $B(\frac{1}{\pi},0)$.

$A,B\in cl(X)$. נניח כי קיימת מסילה רציפה $\gamma:[0,1]\to cl(X)$ כך ש $\gamma(0)=A$, $\gamma(1)=B$

נסמן $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ לכל $x\in[0,1]$.

אפשר להסתכל על $x(t):[0,1]\to\mathbb{R}$, $y(t):[0,1]\to\mathbb{R}$ שתי פונקציות רציפות.

הן מקיימות שוויון $y(t)=\sin\left(\frac{1}{x(t)}\right)$.

יש סדרה כך ש $x(t_n)\to 0$ אבל $y(t_n)\not\to 0$ בניגוד לרציפות של γ.

שאלה 9

נוכיח קודם שקבוצה Γ_f היא קשירה מסילתית. ניקח $a\le x_0<x_1\le b$

$P_0(x_0,f(x_0))\in\Gamma_f$; $P_1(x_1,f(x_1))\in\Gamma_f$ שתי נקודות.

נגדיר $\varphi:[x_0,x_1]\to\Gamma_f$ ע"י נוסחה $\varphi(x)=(x,f(x))$. יש פונקציה לסורית

$\alpha(t) : [0,1] \to [x_0, x_1]$

כך ש: $\alpha(0)=x_0$, $\alpha(1)=x_1$. אז

$\gamma = \varphi\circ\alpha : [0,1] \to \Gamma_f$ רציפה

ו $\gamma(0)=P_0$, $\gamma(1)=P_1$,

$\gamma(t)\in\Gamma_f$ לכל t .

<u>הוכחה של קומפקטיות של Γ_f .</u>

לפי משפט Weierstrass $f(x)$ חסומה בקטע $[a,b]$,

ז"א $\exists C>0 \ \forall x\in[a,b] \ |f(x)|\le C$, לכן

$$\Gamma_f \subset \underbrace{[a,b]\times[-C,C]}_{\text{מלבן מישורי}} \subset \mathbb{R}^2$$

ז"א Γ_f קבוצה חסומה ב $\mathbb{R}^2$.

נניח עכשיו כי $\{P_n(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma_f$ סדרה

ו $P_n \to P_0$ ב $\mathbb{R}^2$.

אזי $\begin{cases} x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0 \end{cases}$ אומנם $y_n = f(x_n)$ ופונקציה

f רציפה, לכן

$$y_n = f(x_n) \to y_0, \qquad f(x_n) \to f(x_0)$$

מכאן $y_0 = f(x_0)$, ז"א $P_0\in\Gamma_f$, ז"א Γ_f קבוצה סגורה ב $\mathbb{R}^2$.

ומכאן, Γ_f גם סגורה וגם חסומה, לכן קומפקטית.

שאלה 10 X קבוצה סגורה וחסומה,
לכן קומפקטית.

לפי הגדרה קבוצה קמורה אם לכל שתי נקודות הקטע שמחבר אותם מוכל בתוך הקבוצה.

כאן $P_{1,2}(\pm 1,0,0) \in X$, $P_0(0,0,0) \notin X$
ולכן קטע $[P_1,P_2]$ לא מוכל בתוך X.

למרות זאת X קבוצה קשירה מסילתית.
כל שתי נקודות A,B אפשר לחבר בתוך X על ידי מסילה שמורכבת משני רדיוסים וקשת של מעגל כמו: