פתרונות של עבודת בית 2

1. חשבו $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx$.

פתרון: $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx = \int\left(1+\frac{2}{x-4}+\frac{12}{x-3}-\frac{8}{x-2}\right)dx =$

$x+2\ln|x-4|+12\ln|x-3|-8\ln|x-2|+C$.

2. חשבו $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx$.

פתרון: $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx = \int\left(\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{x+1}\right)dx = \ln|x+1|-\frac{1}{2(x+2)^2}+C$.

3. חשבו $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}dx =$.

פתרון: $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}dx = \int\left(\frac{x+2}{x^2+4}-\frac{1}{(x+2)^2}\right)dx = \frac{1}{(x+2)}+\int\frac{x+2}{x^2+4}dx =$

$$\frac{1}{(x+2)}+\int\frac{x+2}{x^2+4}dx = \frac{1}{(x+2)}+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}dx+2\int\frac{dx}{x^2+4} =$$

$$\frac{1}{(x+2)}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+(x/2)^2} = \frac{1}{(x+2)}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\arctan\frac{x}{2}+C.$$

4. חשבו $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}dx$.

פתרון: $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}dx = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}dx-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{(1+\sin x)^2}dx =$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\left(1+\sin x\right)}{\left(1+\sin x\right)^2}-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\left(1+\sin x\right)^2}dx=\underbrace{-\frac{1}{1+\sin x}\Bigg|_0^{\pi/2}}_{=1/2}-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\left(1+\sin x\right)^2}dx=$$

$$\frac{1}{2}-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\left(1+\sin x\right)^2}dx=\left[t=\tan\frac{x}{2}\right]=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$.\frac{1}{2}-4\int_0^1\frac{tdt}{\left(1+t\right)^4}=\frac{1}{2}-4\int_0^1\left(\frac{1}{\left(1+t\right)^3}-\frac{1}{\left(1+t\right)^4}\right)dt=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{\left(1+t\right)^2}-\frac{4}{3}\frac{1}{\left(1+t\right)^3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}$$

5. חשבו $.\int_0^{\pi}2^4\cos^8\frac{x}{2}dx$

פתרון: $\int_0^{\pi}2^4\cos^8\frac{x}{2}dx=\int_0^{\pi}\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)^4dx=\int_0^{\pi}\left(1+\cos x\right)^4dx=$

$\int_0^{\pi}\left(1+4\cos x+6\cos^2 x+4\cos^3 x+\cos^4 x\right)dx=\ldots$, נחשב בנפרד את כל אחד מהמחוברים באינטגרל האחרון:

$$\int_0^{\pi}dx=\pi\ ;\int_0^{\pi}4\cos xdx=0\ ;\int_0^{\pi}6\cos^2 xdx=3\int_0^{\pi}\left(1+\cos 2x\right)dx=3\pi\ ;$$

$$\int_0^{\pi}4\cos^3 xdx=4\int_0^{\pi}\cos^2 x\cos xdx=4\int_0^{\pi}\left(1-\sin^2 x\right)d\sin x=0\ ;$$

$\int_0^{\pi}\cos^4 xdx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(1+\cos 2x\right)^2dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(1+2\cos 2x+\cos^4 2x\right)dx=\frac{3\pi}{8}$, לכן $\int_0^{\pi}2^4\cos^8\frac{x}{2}dx=\frac{35}{8}\pi$.

6. חשבו $.\int_0^3\frac{dx}{\left(9+x^2\right)^{3/2}}$

פתרון: $.\int_0^3\frac{dx}{\left(9+x^2\right)^{3/2}}=\left[x=3\tan t\right]=\frac{1}{9}\int_0^{\pi/4}\cos tdt=\frac{1}{9\sqrt{2}}$

7. חשבו את שטח התחום המישורי החסום: **א.** ע"י הקווים $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\cos^3 t\\ y=\sqrt{2}\sin^3 t\end{cases}$ ו- $x=1$ ל- $x\ge 1$.

פתרון: המשוואות $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$ מגדירות אסטרואידה שנקודות חיתוך שלה עם צירי הקואורדינטות הן:

$\left(\pm 2\sqrt{2}, 0\right)$ ו- $\left(0, \pm\sqrt{2}\right)$. נחשב את תחום האינטגרציה במשתנה t: אם $x=1$ אז $1 = 2\sqrt{2}\cos^3 t$ ולכן $t = \dfrac{\pi}{4}$

ואם $x = 2\sqrt{2}$ אז $t=0$. לכן, כש- t משתנה מ- 0 עד $\dfrac{\pi}{4}$, x משתנה מ- $2\sqrt{2}$ ל- 1. מכאן

$$S = 2\int_{\pi/4}^{0} y(t)x'(t)\,dt = 2\int_{\pi/4}^{0} y(t)x'(t)\,dt = -8\int_{\pi/4}^{0} \sin^4 t \cdot 3\cos^2 t\,dt = 3\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{6}\right).$$

<u>הערה</u>: המקדם 2 של האינטגרל הראשון מופיע בגלל שיש שני חלקים סימטריים לתחום: מעל ציר x (כש- t משתנה מ- 0 עד $\dfrac{\pi}{4}$) ומתחת לציר x (כש- t משתנה מ- $-\dfrac{\pi}{4}$ עד 0).

ב. ע"י קווים במערכת קוטבית $r = 4\cos\theta$ ו- $r=2$ כש- $r \ge 2$.

פתרון: המשוואה $r=2$ מייצגת את המעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו 2; המשוואה $r = 4\cos\theta$ מייצגת את המעגל שמרכזו ב- $(2,0)$ ורדיוסו 2 (ואמנם: מ- $r = 4\cos\theta$ נובע $r^2 = 4r\cos\theta$, נעבור לקואורדינטות קרטזיות ונקבל $x^2 + y^2 = 4x$ ז"א $(x-2)^2 + y^2 = 2^2$). אזי

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (4\cos\theta)^2\,d\theta - \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2)^2\,d\theta = 8\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2\theta\,d\theta - \frac{4\pi}{3} = 4\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (1+\cos 2\theta)\,d\theta - \frac{4\pi}{3} =$$

$$\frac{8\pi}{3} + 2\sin 2\theta\Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} - \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$$

8. חשבו את אורך העקומה:

א. הנתונה ע"י $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ ל- $0 \le x \le 8/9$;

פתרון: $$l = \int_0^{8/9} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^{8/9} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$\int_0^{8/9} \sqrt{1 + \left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx = \int_0^{8/9} \sqrt{1 + \frac{(1-x)^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^{8/9} \sqrt{1 + \frac{1-x}{1+x}}\,dx =$$

$$\int_0^{8/9}\sqrt{\frac{2}{1+x}}dx=\left[\begin{array}{c}\frac{2}{1+x}=t\Rightarrow\frac{2}{t}-1\\ dx=-\frac{2}{t^2}\end{array}\right]=-2\int_2^{18/17}\frac{\sqrt{t}}{t^2}dt=2\int_{18/17}^{2}\frac{\sqrt{t}}{t^2}dt=$$

$$.\,2\int_{18/17}^{2}t^{-3/2}dt=-\frac{4}{\sqrt{t}}\bigg|_{18/17}^{2}=-\frac{4}{\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{18/17}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{17}-3\right)$$

ב. הנתונה ע"י $\begin{cases}x=4\left(\cos t+t\sin t\right)\\ y=4\left(\sin t-t\sin t\right)\end{cases}$ כאשר $0\le t\le 2$.

פתרון: $l=\int_0^2\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt=\int_0^2\sqrt{16t^2\cos^2 t+16t^2\sin^2 t}dt=\int_0^2 4tdt=8$.

9. לחשב נפח של גוף סיבוב שמתקבל על יד סיבוב של תחום שנמצר בין קווים

$\boldsymbol{y=x^2+1}$ ו- $\boldsymbol{y=3x-1}$ סביב ציר ה- $\boldsymbol{x}$.

פתרון: יש למצוא נקודות היתוך של שתי עקומות: למשוואה $\boldsymbol{x^2+1=3x-1}$ יש שני פתרונות: $\boldsymbol{x_1=1,\ x_2=2}$.

לכן $$V=\pi\int_1^2[(3x-1)^2-(x^2+1)^2]dx=\pi[\frac{7}{3}x^3-3x^2-\frac{1}{5}x^5]_1^2=\frac{17}{15}\pi$$

10. לחשב נפח של גוף סיבוב שמתקבל על יד סיבוב של קשת אחת של ציקלואידה

$\begin{cases}\boldsymbol{x=a(t-\sin t)}\\ \boldsymbol{y=a(1-\cos t)}\end{cases}$ סביב ציר ה- $\boldsymbol{x}$.

פתרון: בנוסחה $V=\pi\int_{x=0}^{x=2\pi a}[y(x)]^2dx$ יש לבצע החלפת משתנה לפי הנתון: $\boldsymbol{x=a(t-\sin t)}$, כאשר $\boldsymbol{t\in[0,2\pi]}$. לכן $$V=\pi\int_{x=0}^{x=2\pi a}[y(x)]^2dx=\pi a^3\int_{t=0}^{t=2\pi}(1-\cos t)^3dt=5\pi^2a^3$$