# פתרונות של עבודת בית 1

**שאלה 1.**

פונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה $T$ של קטע $[0,1]$ מתקיים ש - $\bar{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$ כאשר $\lambda(T) < \delta$.

נוכיח שפונקציה בשאלה זאת לא אינטגרבילית.

נקבע $\varepsilon = \frac{1}{2}$. נניח ש- $\delta > 0$ כלשהו. קיים מספר טבעי $n$ כך ש- $\frac{1}{n} < \delta$.

ניקח חלוקה $T$ של קטע $[0,1]$ שמחלקת קטע $[0,1]$ ל - $n$ קטעים שווים

$$T: 0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \ldots < x_n = 1$$

אזי $\underline{S}(T) = 0$ (סכום דרבו תחתון)

$$\bar{S}(T) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{i}{n} = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\frac{(n+1)}{n} > \frac{1}{2}$$ (סכום דרבו עליון)

ולכן מתקיים ש $\bar{S}(T) - \underline{S}(T) > \frac{1}{2} = \varepsilon$.

הסבר: $\underline{S}(T) = 0$ כי $\min\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 0$

$\bar{S}(T) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{i}{n}$ כי $\max\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = x_i = \frac{i}{n}$ מספר רציונאלי.

**שאלה 2.**

פונקציה $f(x)$ היא קבועה, זאת אומרת יש קבוע $C$ כך ש $f(x) = C \quad \forall x \in [a,b]$.

הסבר: אם בדרך שלילה נניח ש $f(x)$ לא קבועה אזי $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) < \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) = M$ ולכן

$\underline{S}(T) = m(b-a) < \bar{S}(T) = M(b-a)$ כאשר החלוקה $T$ מכילה את הקצוות של קטע בלבד: $a, b$.

זאת סתירה לנתון ש $\underline{S}(T) = \bar{S}(T)$ לכל חלוקה.

**שאלה 3.**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \frac{1}{2} < x \le 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad \frac{1}{3} < x \le \frac{1}{2} \\ & \ldots \\ \frac{1}{n} & , \quad \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} \\ & \ldots \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

פונקציה $f(x)$ מונוטונית עולה בקטע $[0,1]$, לכן היא כן אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ לפי המשפט שהוכח בקורס.

כמו כן יש לה נקודות אי-רציפות ב- $x_n = \frac{1}{n}$ בלבד, לכן יש לה קבוצה בת-מניה של נקודות אי-רציפות.

לכן $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ (על פי משפט אחר שלא הוכח בשיעור).

**שאלה 4.**

$$\frac{n}{n^2+i^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

נגדיר פונקציית עזר $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ בקטע $[0,1]$. אזי הסכום $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$

הוא סכום רימן של פונקציה $f(x)$ בקטע $[0,1]$ ולכן התשובה היא

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

**שאלה 5.**

מותר להשתמש בנוסחה של החלפת משתנה כי פונקציה $f(x)$ רציפה והצבה היא פונקציה גזירה ברציפות.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\left\{\begin{array}{c}\sin x=t\\ x=\arcsin t\\ dx=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt\end{array}\right\}=\int_0^1 f(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx=\left\{\begin{array}{c}\cos x=t\\ x=\arccos t\\ dx=\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt\end{array}\right\}=\int_1^0 f(t)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt=\int_0^1 f(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

**שאלה 6.** $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$

**שאלה 7.**

נקבע מספר שלם $n$ כך ש $a\le nT<a+T<(n+1)T$

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^{nT}f(x)dx+\int_{nT}^{a+T}f(x)dx$$

באינטגרל $\int_a^{nT}f(x)dx$ נעשה הצבה $t=x-(n-1)T$

באינטגרל $\int_{nT}^{a+T}f(x)dx$ נעשה הצבה $t=x-nT$ ונשתמש במחזוריות: $f(x)=f(t)$

$$\int_a^{nT}f(x)dx=\int_b^{T}f(t)dt$$

(נסמן $\mathbf{b = a-(n-1)T}$)

$$\int_{nT}^{a+T} f(x)dx = \int_0^b f(t)dt$$

לכן $\displaystyle \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^b f(t)dt + \int_b^T f(t)dt = \int_0^T f(x)dx$

**<u>שאלה 8.</u>** נגדיר פונקצית עזר $\displaystyle g(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt$ . נתון ש - $\displaystyle g(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt = const$ .

מצד שני מותר להשתמש בנוסחת ניוטון- לייבניץ כי $f(x)$ פונקציה רציפה.

ובכן, $g'(x) = f(x+T) - f(x) = (const)' = 0$

ז"א $f(x+T) = f(x)$ לכל $x \in R$ .

בדיקה: באמת $\dfrac{Cn}{n} = C$ .

**<u>שאלה 9.</u>** חשבו $\displaystyle \int_{-2}^{0} (x^2-4)\cos 3x dx$

$$\int_{-2}^{0}\left(x^2-4\right)\cos 3x dx = \begin{bmatrix} u = x^2-4 \Rightarrow & du = 2xdx \\ dv = \cos 3xdx \Rightarrow & v = \dfrac{\sin 3x}{3} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{\sin 3x}{3}\left(x^2-4\right)\Big|_{-2}^{0}}_{=0} - \frac{2}{3}\int_{-2}^{0} x\sin 3xdx =$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{-2} x\sin 3xdx = \begin{bmatrix} u = x \Rightarrow & du = dx \\ dv = \sin 3xdx \Rightarrow & v = -\dfrac{\cos 3x}{3} \end{bmatrix} = \underbrace{-\frac{2}{9}x\cos 3x\Big|_{0}^{-2}}_{=\frac{4}{9}\cos 6} + \frac{2}{9}\int_{0}^{-2}\cos 3xdx =$$

$$\frac{4}{9}\cos 6 + \frac{2}{27}\sin 3x\Big|_{0}^{-2} = \frac{4}{9}\cos 6 - \frac{2}{27}\sin 6 .$$

**<u>שאלה 10.</u>** חשבו **א.** $\displaystyle \int_0^{1/2} \frac{8x - arctg 2x}{1+4x^2}dx$

**פתרון:** $\displaystyle \int_9^{1/2}\frac{8x-\arctan 2x}{1+4x^2}dx = \int_9^{1/2}\frac{8x}{1+4x^2}dx - \int_9^{1/2}\frac{\arctan 2x}{1+4x^2}dx =$

$$\int_0^{1/2}\frac{d\left(1+4x^2\right)}{1+4x^2} - \int_0^{1/2}\arctan 2xd\left(\arctan 2x\right) = \left[\ln\left(1+4x^2\right) - \frac{\arctan^2 2x}{4}\right]\Bigg|_0^{1/2} = \ln 2 - \frac{\pi^2}{64} .$$

חשבו **ב.** $\displaystyle \int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$ .

**פתרון:** $\displaystyle \int\frac{1-\cos x}{\left(x-\sin x\right)^2}dx = \int\frac{d\left(x-\sin x\right)}{\left(x-\sin x\right)^2} = \frac{1}{\sin x - x} + C$ . לכן

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx = \frac{1}{1-\pi/2} - \frac{1}{1/2-\pi/6} = \frac{2}{2-\pi} - \frac{6}{3-\pi} .$$