חדו"א א'2 (20110021) - מבחן מסכם, מועד ב' תשס"ט - פתרונות מקוצרים

1. (א) (15 נק') נסמן $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \geq y \geq x^3\}$. הראו כי הנקודה $(\frac{1}{2}, \frac{1}{7})$ הינה נקודה פנימית של A.
פתרון: נבחר $r = 1/1000$. נראה כי $B_r((\frac{1}{2}, \frac{1}{7})) \subset A$. נניח כי $(x_0, y_0) \in B_r((\frac{1}{2}, \frac{1}{7}))$, כלומר $\sqrt{(x_0 - \frac{1}{2})^2 + ((y_0 - \frac{1}{7})} < 1/1000$. צריך להראות כי $(x_0, y_0) \in A$, כלומר $x_0^2 > y_0 > x_0^3$. נשים לב שבפרט, מתקיים כי $|x_0 - \frac{1}{2}| < 1/1000$ וכן $|y_0 - \frac{1}{7}| < 1/1000$. אם כן, $x_0^2 > (\frac{1}{2} - \frac{1}{1000})^2$ וכן $(\frac{1}{2}+\frac{1}{1000})^3 > x_0^3$. כמו כן, $\frac{1}{7}-\frac{1}{1000} > y_0 > \frac{1}{7}+\frac{1}{1000}$. אם כן, מספיק להראות כי $(\frac{1}{2}-\frac{1}{1000})^2 > \frac{1}{7}+\frac{1}{1000}$ וכן $(\frac{1}{2} + \frac{1}{1000})^3 > \frac{1}{7} - \frac{1}{1000}$. עבור האי-שוויון הראשון, נשים לב (על ידי פתיחת סוגריים) כי: $(\frac{1}{2} - \frac{1}{1000})^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{1000}$, ומכיוון ש-$\frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{3}{28} > \frac{2}{1000}$, מתקבל האי-שוויון הנדרש. עבור האי-שוויון השני, נפתח סוגריים ונראה מייד כי $(\frac{1}{2} + \frac{1}{1000})^3 < \frac{1}{8} + \frac{1}{1000}$, ושוב נקבל אי-שוויון מכיוון ש-$\frac{1}{7} - \frac{1}{8} > \frac{1}{500}$.

(ב) (10 נק') נגדיר

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(x^2 y \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + y^2 x \right) & \mid \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \mid \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

הראו כי f דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

פתרון 1: מכיוון שהפונקציה מקבלת את הערך 0 על הצירים, הרי שהנגזרות החלקיות שלה הן 0 ב-0, ולכן הקירוב הלינארי, אם יש, הוא 0. אם כן, צריך להראות כי $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. יהי $\varepsilon > 0$. צריך למצוא $\delta > 0$ כך שלכל $(x,y) \neq (0,0)$ מתקיים כי אם $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ אז $\left| \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \varepsilon$. נשים לב כי $f(0,0) = 0$. נבטא את הפונקציה בעזרת קואורדינטות פולאריות, ונשים לב שעלינו להראות כי קיים $\delta > 0$ כך שלכל $r < \delta$ ולכל θ מתקיים כי:

$$\left| \frac{1}{r^2} r^3 (\cos^2(\theta)\sin(\theta)\sin(1/r) + \cos(\theta)\sin^2(\theta)) \right| < \varepsilon$$

נשים לב ש-$|\cos^2(\theta)\sin(\theta)\sin(1/r) + \cos(\theta)\sin^2(\theta)| \leq 2$ לכל θ, r, ולכן הביטוי לפונקציה חסום על ידי $\frac{2r^3}{r^2} = 2r$, ולכן אם נגדיר $\delta = \varepsilon/2$, אז δ מקיימת את הנדרש.

פתרון 2: נציג $f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$. נשים לב כי $f(0,0) = 0$, וכן $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (למה?). לכן, $\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2 y \sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) + y^2 x}{x^2+y^2}$ עבור $(x,y) \neq (0,0)$ ו-$\varepsilon(0,0) = 0$. פונקציית הסינוס חסומה על ידי 1, ולכן

$$|\varepsilon(x,y)| \leq \frac{|x^2 y| + |y^2 x|}{x^2+y^2} = (|x| + |y|)\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}(|x| + |y|)$$

מכאן ש-$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$ ולכן $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$.

2. (א) (15 נק') הוכיחו או הפריכו בעזרת דוגמא נגדית: אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $r > 0$ ו-b_n סדרת מספרים המקיימת $\frac{1}{n} < b_n < n$ לכל $n > 1$ אז רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ גם הוא r.

פתרון: הטענה נכונה. הוכחה: ידוע לנו כי $r = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$. עתה, $\frac{1}{n} < b_n < n$, ולכן $\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} \leq b_n^{1/n} \leq (n)^{1/n}$ לכל $n > 1$, ומכיוון ש-$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (n)^{1/n} = 1$, הרי שמכלל הסנדביץ' גם $\lim_{n\to\infty} b_n^{1/n} = 1$. מכאן ש-$\limsup |a_n|^{1/n} = \limsup |a_n b_n|^{1/n}$. כדי לראות זאת, נסמן $c_n = |a_n b_n|^{1/n}$. נבחר תת סדרה n_k כך ש-$c_{n_k} = \limsup c_n$ ($k \to \infty$), אז $|a_{n_k}|^{1/n_k} = c_{n_k}/b_{n_k}^{1/n_k}$,

ומכיוון ש- $\lim_{k\to\infty} b_{n_k}^{1/n_k}=1$ הרי שגם $\lim_{k\to\infty}|a_{n_k}|^{1/n_k}=\limsup c_n$. מכאן ש- $\limsup c_n \geq \limsup |a_{n_k}|^{1/n_k}$.
באופן דומה, אם נבחר תת סדרה m_k כך ש- $\lim_{k\to\infty}|a_{m_k}|^{1/m_k}=\limsup |a_{m_k}|^{1/m_k}$, אז נקבל ש- $\lim_{k\to\infty} c_{m_k}=\limsup |a_{m_k}|^{1/m_k}$ ולכן $\limsup c_n \leq \limsup |a_{m_k}|^{1/m_k}$, ושני האי-שוויונים נותנים לנו את השוויון הנדרש. מכאן ש- $r=\frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}=\frac{1}{\limsup |a_nb_n|^{1/n}}$, ולכן רדיוס ההתכנסות של טור החזקות השני גם הוא r.

(ב) (10 נק') קבעו האם הטור הבא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

כאשר $\log$ מסמן את הלוגריתם הטבעי.

פתרון 1: נשים לב שאם $n=2k$ (n זוגי), $\log(1+\frac{(-1)^n}{n})=\log(\frac{2k+1}{2k})=\log(2k+1)-\log(2k)$,
ועבור $n=2k+1$ (n אי-זוגי) מתקיים כי $\log(1+\frac{(-1)^n}{n})=\log(\frac{2k}{2k+1})=\log(2k)-\log(2k+1)$.
לכן אם $m=2j+1$ אי-זוגי אז $\sum_{n=2}^{m}\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=0$, ואם $m=2j$ זוגי אז כל המחוברים מצטמצמים פרט לאחרון, ואז $\sum_{n=2}^{m}\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=\log(1+\frac{1}{m})$. מכיוון ש- $\lim_{m\to\infty}1+\frac{1}{m}=1$ ו-$\log$ רציפה, הרי ששני הביטויים (גם עבור m זוגי וגם עבור m אי-זוגי) שואפים ל-0, ולכן הטור מתכנס ל-0, ובפרט מתכנס.
הטור מתכנס בתנאי ולא בהחלט. כדי להראות זאת, נשים לב שבעזרת החישוב הקודם, נקבל כי עבור $m=2j+1$ אי-זוגי, נקבל כי $\sum_{n=2}^{2j+1}\left|\log(1+\frac{(-1)^n}{n})\right|=2\cdot\sum_{k=1}^{j}[\log(2k+1)-\log(2k)]$. ממשפט הערך הממוצע, לכל k קיים $c_k\in(2k,2k+1)$ כך ש- $\log(2k+1)-\log(2k)=\frac{1}{c_k}$.
לכן $\frac{1}{2k+1}\leq\log(2k+1)-\log(2k)$, וידוע לנו כי הטור $\lim_{j\to\infty}\sum_{n=2}^{j}\frac{1}{2j+1}=\infty$ (למשל על ידי השוואה לטור ההרמוני).

פתרון 2: ממשפט טיילור, יש קבוע $K>0$ כך שלכל $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ מתקיים כי $|\log(1+x)-x|\leq Kx^2$ (למה?). לכן, מכיוון ש- $\frac{(-1)^n}{n}\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ לכל $n\geq 2$, הרי ש- $\left|\log(1+\frac{(-1)^n}{n})-\frac{(-1)^n}{n}\right|\leq K/n^2$.
מכיוון שהטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{K}{n^2}$ מתכנס, הרי שהטור $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\log(1+\frac{(-1)^n}{n})-\frac{(-1)^n}{n}\right]$ מתכנס בהחלט. כדי לראות זאת, נשים לב שבאופן כללי, אם נתונות סדרות a_n,b_n,c_n כך ש- $c_n=a_n+b_n$ ו- $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט, אז אם $\sum_{n=2}^{\infty}b_n$ מתכנס בהחלט אז מאחר ש- $|c_n|\leq|a_n|+|b_n|$, ו- $\sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ מתכנס, הרי ש- $\sum_{n=2}^{\infty}|c_n|$ מתכנס, ולכן $\sum_{n=2}^{\infty}c_n$ מתכנס בהחלט. באופן דומה, $b_n=c_n-a_n$, ולכן $|b_n|\leq|c_n|+|a_n|$, ולכן אם $\sum_{n=2}^{\infty}c_n$ מתכנס בהחלט אז גם $\sum_{n=2}^{\infty}b_n$ מתכנס בהחלט. לגבי התכנסות בתנאי, אם $\sum_{n=2}^{\infty}b_n$ מתכנס בתנאי, אז מכיוון ש- $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=2}^{\infty}c_n$ מתכנס, אך ממה שהראינו קודם, $\sum_{n=2}^{\infty}c_n$ אינו מתכנס בהחלט, ולכן $\sum_{n=2}^{\infty}c_n$ מתכנס בתנאי. באופן דומה, אם $\sum_{n=2}^{\infty}c_n$ מתכנס בתנאי אז $\sum_{n=2}^{\infty}b_n$ מתכנס בתנאי.
מכאן שהטורים $\sum_{n=2}^{\infty}\log(1+\frac{(-1)^n}{n})$ ו- $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ מתכנסים ומתבדרים ביחד. עתה, הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס בתנאי - הערכים המוחלטים שלו מהווים סדרה מונוטונית יורדת ושואפת ל-0, ולכן והסימנים מתחלפים, ולכן הוא מתכנס, אך טור הערכים המוחלטים הוא הטור ההרמוני, שמתבדר. מכאן שהטור הנתון מתכנס בתנאי.

3. (א) (15 נק') תהי $A\subset\mathbb{R}^2$ קבוצה קומפקטית. תהי $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נסמן $G_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in A\ ,\ z=f(x,y)\}$ הראו כי G_f קומפקטית.

פתרון: תהי $v_n=(x_n,y_n,z_n)\in G_f$ סדרה. יש להראות כי יש לה תת סדרה המתכנסת לאיבר ב-G_f. מכיוון ש-A קומפקטית ו-$(x_n,y_n)\in A$, הרי שיש ל-(x_n,y_n) תת סדרה (x_{n_k},y_{n_k}) המתכנסת לנקודה $(x_0,y_0)\in A$ כלשהי. נסמן $z_0=f(x_0,y_0)$. מכיוון ש-f רציפה, הרי ש-$\lim_{k\to\infty} z_{n_k}=\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k},y_{n_k})=f(x_0,y_0)=z_0$, ולכן $v_{n_k}=(x_{n_k},y_{n_k},z_{n_k})$ שואפת ל-$(x_0,y_0,z_0)\in G_f$, כנדרש.

(ב) (10 נק') נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על ידי

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{xy}-1}{|x|+|y|} & | \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & | \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

קבעו האם f רציפה בנקודה $(0,0)$.

פתרון 1: הפונקציה רציפה ב-0. כדי לראות זאת, בהנתן $\varepsilon>0$ עלינו למצוא $\delta>0$ כך שלכל (x,y), אם $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ אז $|f(x,y)|<\varepsilon$. בקואורדינטות פולאריות, אנו רוצים להראות שקיים δ כך שלכל $r<\delta$ ולכל θ שהוא מתקיים כי $\left|\dfrac{e^{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}-1}{r(|\cos(\theta)|+|\sin(\theta)|)}\right|<\varepsilon$.

נשים לב כי $|\cos(\theta)|+|\sin(\theta)|\geq\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$, ולכן מספיק להראות כי קיים δ כך שלכל $r<\delta$ ולכל θ מתקיים כי $\left|\dfrac{e^{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}-1}{r}\right|<\varepsilon$. ממשפט הערך הממוצע, יש קבוע $K>0$ כך שלכל $t\in[-1,1]$ מתקיים כי $|e^t-1|\leq K|t|$ (אפשר לקחת את K להיות הסופרימום של הערך המוחלט הנגזרת של e^t בקטע $[-1,1]$, כלומר $K=e$). לכן, עבור כל $r<1$ מתקיים כי $|e^{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}-1|<Kr^2|\cos(\theta)\sin(\theta)|$, ולכן $\left|\dfrac{e^{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}-1}{r(|\cos(\theta)|+|\sin(\theta)|)}\right|\leq|Kr\cos(\theta)\sin(\theta)|<Kr$.

אם כן, אם נבחר $\delta=\min(\varepsilon/K,1)$, אז קיבלנו $\delta>0$ כנדרש.

פתרון 2: נראה כי f רציפה ב-$(0,0)$, כלומר ש-$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$. נשים לב ש-$|xy|\leq\frac{1}{2}(|x|+|y|)^2$. הפונקציה $\varphi(t)=e^t$ מונוטונית עולה, ולכן

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}(|x|+|y|)^2}-1}{|x|+|y|}\leq f(x,y)\leq\frac{e^{\frac{1}{2}(|x|+|y|)^2}-1}{|x|+|y|}$$

נסמן $t=|x|+|y|$. נשים לב ש-$t\to0$ אם ורק אם $(x,y)\to(0,0)$ (למה? חשוב להסביר כאן מדוע אם $t\to0$ אז $(x,y)\to(0,0)$ - הצד השני ברור). לכן, מספיק לבדוק כי

$$\lim_{t\to0}\frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}-1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{e^{\frac{1}{2}t^2}-1}{t}=0$$

מה שאכן נובע בקלות משיקולים שלמדתם בחדו"א א'1.

4. הראו כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\cos(x^n)}{1+x^n}dx=1$.

פתרון: בהנתן $\varepsilon>0$ עלינו למצוא N כך שלכל $n>N$ מתקיים כי $\left|\int_0^1\frac{\cos(x^n)}{1+x^n}-1\right|<\varepsilon$. נשים לב כי לכל $x\in[0,1]$, $0<\frac{\cos(x^n)}{1+x^n}\leq1$, ולכן $0\leq1-\frac{\cos(x^n)}{1+x^n}\leq1$. אם כן, נחלק את הקטע $[0,1]$ לשני קטעים, $[0,1-\varepsilon/2]$ ו-$[1-\varepsilon/2,1]$. נקבל כי $\left|\int_{1-\varepsilon/2}^1 1-\frac{\cos(x^n)}{1+x^n}dx\right|\leq\int_{1-\varepsilon/2}^1 1dx=\varepsilon/2$. נשים לב גם כי הפונקציה $f(x)=\cos(x)/(1+x^n)$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,1]$ (המונה יורד והמכנה עולה). לכן לכל $x\in[0,1-\varepsilon/2]$ מתקיים כי $\frac{\cos((1-\varepsilon/2)^n)}{1+(1-\varepsilon/2)^n}<\frac{\cos(x^n)}{1+x^n}\leq1$. מכיוון ש-$\lim_{n\to\infty}(1-\varepsilon/2)^n=0$, ומכיוון שהפונקציה $f(x)$ רציפה ו-$f(0)=1$, הרי שקיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים כי $1\geq f((1-\varepsilon/2)^n)>1-\varepsilon/2$. מהמונוטוניות, נקבל כי לכל $n>N$ ו-$x\in[0,1-\varepsilon/2]$ מתקיים כי $1\geq f(x^n)>1-\varepsilon/2$. אם כן, עבור כל $n>N$ מתקיים כי $\left|\int_0^{1-\varepsilon/2}1-\frac{\cos(x^n)}{1+x^n}dx\right|\leq\int_0^{1-\varepsilon/2}\frac{\varepsilon}{2}dx=(1-\varepsilon/2)\cdot\varepsilon/2$. מכאן שלכל $n>N$ מתקיים כי

$$\left|\int_0^1\frac{\cos(x^n)}{1+x^n}dx-1\right|=\left|\int_0^{1-\varepsilon/2}1-\frac{\cos(x^n)}{1+x^n}dx\right|+\left|\int_{1-\varepsilon/2}^2 1-\frac{\cos(x^n)}{1+x^n}dx\right|\leq(1-\varepsilon/2)\cdot\varepsilon/2+\varepsilon/2<\varepsilon$$

כנדרש.

5. נניח כי $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות, ויש קבועים $C,D>0$ כך ש-$|f(x)|<C$ ו-$|g(x)|<D$ לכל $x\in\mathbb{R}$. תהיינה $f_n,g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n=1,2,3,\ldots$ סדרות פונקציות כך ש-$f_n\to f$ ו-$g_n\to g$ במידה שווה. נסמן $h_n(x)=f_n(x)\cdot g_n(x)$, $h(x)=f(x)\cdot g(x)$. הראו כי $h_n\to h$ במידה שווה.

פתרון: בהינתן $\varepsilon>0$ אנו רוים למצוא N כך שלכל $n>N$ מתקיים כי לכל $x\in\mathbb{R}$, $|h_n(x)-h(x)|<\varepsilon$.
ראשית, מכיוון ש-$f_n\to f$ במידה שווה, יש N_1 כך שלכל $n>N_1$ מתקיים כי לכל $x\in\mathbb{R}$, $|f_n(x)-f(x)|<1$, ולכן בפרט $|f_n(x)|<|f(x)|+1<C+1$. נבחר N_2 כך שלכל $n>N_2$ מתקיים כי לכל $x\in\mathbb{R}$, $|g_n(x)-g(x)|<\varepsilon/2(C+1)$. נבחר N_3 כך שלכל $n>N_3$ מתקיים כי לכל $x\in\mathbb{R}$, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2D$. נגדיר $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$, אז לכל $n>N$ מתקיים כי לכל $x\in\mathbb{R}$,

$$|h_n(x)-h(x)|=|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)|=|f_n(x)(g_n(x)-g(x))+g(x)(f_n(x)-f(x))|$$

$$\leq|f_n(x)|\cdot|(g_n(x)-g(x))|+|g(x)|\cdot|(f_n(x)-f(x))|<(C+1)\cdot\frac{\varepsilon}{2(C+1)}+D\cdot\frac{\varepsilon}{2D}=\varepsilon$$

כנדרש.