אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה: 15.07.03
שם המורה: גולדשטיין, לוין, ליידרמן
מבחן ב: חדו"א א2
מס' הקורס: 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א', סמ': ב', מועד: ב'
משך הבחינה: 2.5 שעות
חומר עזר: דף נוסחאות אחד (2 עמ')

מס' הנבחן: ______________

ענו על 4 השאלות מתוך 5.
כל שאלה שווה 25 נקודות.
תשובותיך תהיינה מלאות ומנומקות היטב
נא לכתוב ברור ונקי..

<u>השאלות:</u>

1. מצא את כל הפונקציות $f(x)$ שהן רציפות לכל x ומקיימות את התכונה הבאה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{x}{n}\right)+f\left(\frac{2x}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{nx}{n}\right)\right)=f(x)$$ לכל x.

2.

א. הראה כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ מתכנס לכל $x>0$ וסכום הטור הוא פונקציה רציפה בתחום $(0,\infty)$.

ב. הראה כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ לא מתכנס במידה שווה בתחום $(1,\infty)$

3. נתון טור הבא $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\sin\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)x^{2n}$.

א. מצא את רדיוס התכנסות של הטור.

ב. חקור את ההתכנסות בקצוות.

4. תהי $f(x,y)=\ln\left(1+\left|x^2-y^2\right|\right)$

א. מצא את כל הנקודות שבהן קיימות $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

ב. מצא את כל הנקודות שבהן הפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית.

5. נתונה הפונקציה $f(x,y)=1+2x+4x^2-2xy^2$.

א. מצא נקודות האקסטרמום המקומי של פונקציה וקבע את הסוגיהן,

ב. מצא את הערך גדול ביותר ואת הערך קטן ביותר של פונקציה במשולש החסום ע"י הישרים הבאים:
$y-2x=-1,\ y-2x=1,\ x=0$

.

-בהצלחה-

פתרון של המבחן מועד ב' 2003

שאלה 1

הביטוי $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(x\frac{k}{n}\right)$ הוא למעשה סכום אינטגראלי לפי רימן של פונקציה $f(xt)$ בקטע $[0,1]$

כאשר x הוא קבוע והקטע $[0,1]$ מחולק לחלקים שווים בנקודות $t_n = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{n}{n}$.

פונקציה $f(t)$ רציפה, לכן $f(xt)$ גם רציפה ולכן סכומי רימן שואפים לאינטגרל מסוים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(x\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(xt)dt \quad \text{לכל} \quad x \neq 0$$

$$\int_0^1 f(xt)dt = \left\{\begin{array}{c} y = xt \\ y \in [0,x] \\ \frac{dy}{x} = dt \end{array}\right\} = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy$$

לכן $\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy = f(x)$ לכל $x \neq 0$

הערה: גישה קצת אחרת אך שקולה היא לחלק את הקטע $[0,x]$ ל- n חלקים שווים על ידי החלוקה $0, \frac{1}{n}x, \frac{2}{n}x, \ldots \frac{n}{n}x$ ואז שוב לקבל שלכל $x \neq 0$ $\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}x\right) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy = f(x),$

נסיים את הפתרון. פונקציה $f(t)$ רציפה, לכן פונקציה $F(x) = \int_0^x f(y)dy$ גזירה לכל x ולכן פונקציה

$f(x) = \frac{F(x)}{x}$ גם גזירה לכל $x \neq 0$. ניקח נגזרת משני הצדדים של שוויון $F(x) = x\, f(x)$:

$f(x) = [x\, f(x)]' = f(x) + x\, f'(x)$ לכל $x \neq 0$.

מפה $x\, f'(x) = 0 \Leftarrow f'(x) = 0$ ולכן $f(x) = C$ קבועה לכל $x \neq 0$.

לפי רציפות של $f(x)$ גם $f(0) = C$. ובכן $f(x) = C$ פונקציה קבועה.

בדיקה: באמת $\frac{Cn}{n} = C$.

שאלה 2

א.

נקבע את ה $x > 0$ כלשהו. אזי הסידרה $\frac{1}{n^x} \searrow_{n\to\infty} 0$ יורדת ל-0 מונוטונית ולכן לפי מבחן לייבניץ הטור

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ מתכנס לכל $x > 0$. כדי להכיח רציפות של הסכום $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ בתכום $(0,\infty)$. מספיק להכיח שטור מתכנס במידה שווה לכל $a > 0$ בתחום $[a,\infty)$.

אזהרה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ לא מתכנס במידה שווה בתחום $(0,\infty)$ כי הוא מדבדר בקצה $x = 0$.

נסמן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}=\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^n}{n^x}+R_m(x)$. צריך להראות שהסדרה של שאריות $\{R_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ מתכנס במידה שווה ל-0 בתכום $[a,\infty)$. זה נובע מתכונה ידועה של טור עם סימנים מתחליפים:

$$\left|R_m(x)\right|\le\frac{1}{(m+1)^x}\le\frac{1}{(m+1)^a}$$ לכל $x\ge a$

$\frac{1}{m^a}\xrightarrow[m\to\infty]{}0$ ולכן $R_m(x)\xrightarrow[m\to\infty]{}0$ במידה שווה בתחום $[a,\infty)$.

לכן לפי משפט $S(x)$ רציפה ב $[a,\infty)$ ומפני ש a שרירותי $S(x)$ רציפה לכל $x>0$.

ב.

נניח בדרך השלילה שטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ כן מתכנס במידה שווה בתחום $(1,\infty)$ אז מתקיים קריטריון קושי:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\ n_0\quad\forall x\in(1,\infty)\quad n>n_0\quad\forall p$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^x}\right|<\varepsilon$$

ואזי $\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}\le\varepsilon$

כלומר טור הרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתכנס אבל טור הרמוני מתבדר, סתירה.

<u>שאלה 3</u>

יהיו $a_n=\frac{1}{2^n}\sin\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ו $y=x^2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_ny^n$$

רדיוס התכנסות של טור $\sum_{n=1}^{\infty}a_ny^n$ שווה ל:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^n}\sin\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{2^{n+1}}\sin\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}\right|=2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\right|=2\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}=2$$

לכן רדיוס ההתכנסות של טור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n}$ הינו $R=\sqrt{2}$

התכנסות בקצוות: $x=\pm\sqrt{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\pm\sqrt{2})^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n2^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

הטור מתכנס לפי מבחן ליבניץ מפני ש: $\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ מונוטונית שואף ל-0.

<u>שאלה 4</u>

מפני ש $\ln(1+|z|)$ דיפרנציאבילית לכל $z\neq 0$. צריך לבדוק את הגזירות וה דיפרנציאבילית של $f(x,y)=\left(1+\left|x^2-y^2\right|\right)$

רק בנקודות $x^2-y^2=0 \Leftrightarrow x=\pm y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a)=\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+\left|x^2-a^2\right|)-\ln(1+\left|a^2-a^2\right|)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+\left|x^2-a^2\right|)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+\left|x^2-a^2\right|)}{\left|x^2-a^2\right|}\frac{\left|x^2-a^2\right|}{x-a}$$

א. $f(x,o)=0,\ f(0,0)=0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$

$$f(0,y)=0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

ובכן $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ קיימות בכל נקודות של תחום G

ב. $f(x,y)$ לא דיפירנציאבילית ב- $(0,0)$ כי $f(x,y)$ אפילו לא רציפה ב- $(0,0)$

$$\cos x-1=-\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\sim-\frac{1}{2}x^2,\ x\to 0$$

$$\sin x\sim x,\ x\to 0;\ln(1+y)\sim y,\ y\to 0$$

ולכן $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ - גבול הזה לא קיים משום שגבולות בכיוונים של צירי Ox,Oy שווים ל- 0

וגבול בכיוון שבו $x=y$ שווה ל $-\frac{1}{4}$

<u>שאלה 5</u>

א. קיימות
$$\frac{\partial f}{\partial x}=2+8x-2y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=-4xy$$
בכל מישור

או
$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$$

ובכן יש 3 נק' סטציונריות: $M_1(0,-1);M_2(0,1);M_3(-0.25,0);$

נבדוק תנאי מספיק של אקסטרמום

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=8;C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4x;B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-4y$$

$M_1(0,-1):\ \Delta_1=8,\Delta_2<0,$ ***is not an extremum po***int

$M_2(0,1):$ ***the same situation***

$M_3(-0.25,0):$ min ***po***int

ב. נחקור על השפה

$x = 0$
$f(0,1) = 1$

$y = 2x + 1 \quad \boldsymbol{and} \quad y = -2x - 1$

$g\left(x\right) = -8x^3 - 4x^2 + 1$

$g'(x) = -24x^2 - 8x = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases} f(0,\pm 1) = 1, \begin{cases} y = \dfrac{1}{3} \quad \boldsymbol{or} \quad y = -1 \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = f\left(-\frac{1}{3},-1\right) = \frac{23}{27}$$

כאן נק' פינות : $M_1(0,-1); M_2(0,1); M_4(-0.5,0);$

מסטבר שערך הכי גדול והכי קטן פונקציה $f\left(x,y\right)$ יכולה לקבל רק ברודקודים של ריבוע :

$f(-0.25,0) = \frac{3}{4}$ - ערך הכי קטן

$f(0,\pm 1) = 1$ ערך הכי גדול