אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' הנבחן:______________

תאריך הבחינה: 29.07.2002
שם המורה: גולדשטיין, לוין, ליידרמן
מבחן ב: חדו"א א2
מס' הקורס: 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א', סמ': ב', מועד: ב'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: אין

ענו על 5 השאלות מתוך 6.
כל שאלה שווה 20 נקודות.
תשובותיך תהיינה מלאה ומנומקצ היטב
נא לכתוב ברור ונקי.

השאלות:

1. נתונה פונקציה $f(x)$ מוגדרת ורציפה לכל $x\in\mathbb{R}$. הוכח שאם $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$ לכל $a>0$ אז $f(x)$ פונקציה אי-זוגית, כלומר $f(x)=-f(-x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$

2. חשבו את האורך העקום המוגדר על ידי הצגה פרמטרית $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{2}t^2 \\ y(t)=\int_0^t \sqrt{\tan^2 x-x^2}\,dx \end{cases}$ כאשר $0\le x\le\frac{\pi}{4}$

3. נסמן: $a_n=\int_0^{\sqrt{n}} \sqrt[10]{1+x^5}\,dx,\ n=1,2,...$

חקור את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$.

4. נסמן: $x\ge 0$; $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)+xn^2}$

א. הוכיחו ש- $S(x)$ פונקציה רציפה בתכום $[0,\infty)$.

ב. הוכיחו שטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)+xn^2}$; בתחום $(0,\infty)$ לא מתכנס במדה שווה.

5. נתונה פונקציה $f(x,y)=\begin{cases} \sin x\sin y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & if\ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & if\ \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

חישבו את: $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$

6. נתונה הפונקציה $f(x,y)=1-x+x^2+y^2x$.

א. מצא את הנקודות אקסטרמום המקומי של הפונקציה וקבע את הסוגיהן

ב. מצא את הערך המקסימלי והערך המינימלי שמקבלת פונקציה במשולש שחסום על ידי קוים $x=0$; $y+x=1$; $-y+x=1$

-בהצלחה-

פתרון של המבחן מועד ב' 2002

שאלה 1

$f(x)=-f(-x)$ אם ורק אם $\varphi(x)=f(x)+f(-x)=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$. נשים לב ש- $\varphi(x)$ פונקציה זוגית לכן לכל $a\in\mathbb{R}$.

$$\int_{-a}^{a}\varphi(x)dx=2\int_{0}^{a}\varphi(x)dx$$

מצד שני: $\int_{-a}^{a}\varphi(x)dx=\int_{-a}^{a}f(x)dx+\int_{-a}^{a}f(-x)dx=\{t=-x\}=\int_{-a}^{a}f(x)dx+\int_{-a}^{a}f(t)dt=0$

לפי הנחה. ובכן, לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\int_{0}^{a}\varphi(x)dx=0$ לכן לכל $a<b$ מתקיים $\int_{a}^{b}\varphi(x)dx=\int_{0}^{b}\varphi(x)dx-\int_{0}^{a}\varphi(x)dx=0$

הוכחנו שפונקציה רציפה $\varphi(x)$ מתקיים תכונה הבאה: לכל $a<b$ $\int_{a}^{b}\varphi(x)dx=0$

לפי תוצאה של מועד א' תכונה הזאת גוררת ש- $\varphi(x)=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$ כלומר $f(x)=-f(-x)$

<u>דרך שניה:</u> נגדיר $F(t)=\int_{-t}^{t}f(x)dx$ לכל $t>0$. $f(x)$ רציפה לכל לפי משפט היסודי של חדו"א 2א $F(t)$ גזירה:

$$F'(t)=f(t)-f(-t)(-t)'=f(t)+f(-t)$$

אבל $F(t)=0$ לכל t לכן גם $F'(t)=0$ כלומר $f(t)=-f(-t)$ לכל t .

שאלה 2

$$L=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

$$\begin{cases}x'(t)=t\\ y'(t)=\sqrt{\tan^2(t)-t^2}\end{cases};t\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$$

$$L=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan(t)dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{\cos t}dt=-\ln\left|\cos t\right|\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2$$

שאלה 3

נגדיר $b_n=\int_{0}^{\sqrt{n}}\sqrt[10]{1+x^5}\,dx$ אזי $b_n=\frac{2}{3}n^{3/4}$

נוכיח ש- $a_n\sim b_n;n\to\infty\Leftrightarrow\frac{1}{a_n}\sim\frac{1}{b_n};n\to\infty$

כדי להשתמש בנגזרות אנחנו נתיחס ל- n כמשתנה רציף $n\geq 1$. a_n ו- b_n והפכו לערכים של פונקציות $a(n),\ b(n)$ כאשר n הוא משתנה רציף.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b(n)}{a(n)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\{\text{L'Hôpital's rule}\}=\lim_{n\to\infty}\frac{b'(n)}{a'(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{b(n)}{a(n)}=\frac{\sqrt[10]{1+\left(\sqrt{n}\right)^5}\left(\sqrt{n}\right)'}{\frac{1}{2}n^{-1/4}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[10]{1+\frac{1}{n^{5/2}}}=1$$

טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$ מתבדר, לכן לפי מבחן השוואה גם טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ מתבדר.

<u>דרך שניה:</u>

$a_n=\int_0^1\sqrt[10]{1+x^5}dx+\int_1^{\sqrt{n}}\sqrt[10]{1+x^5}dx$ איפה $C_1=\int_0^1\sqrt[10]{1+x^5}dx$ - קבוע

$$\int_1^{\sqrt{n}}\sqrt[10]{1+x^5}dx\le\int_1^{\sqrt{n}}\sqrt[10]{x^5+x^5}dx=\sqrt[10]{2}\int_1^{\sqrt{n}}\sqrt[10]{x}dx=\{C_2=\sqrt[10]{2}\}\le C_2b_n$$

ובכן $a_n\le C_1+C_2b_n$ לכל $n=1,2,...$

ולכן $\frac{1}{a_n}\le\frac{1}{C_1+C_2b_n}$ לכל $n=1,2,...$

$\frac{1}{C_1+C_2b_n}\sim\frac{1}{b_n};n\to\infty$ לכן טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ מתבדר לפי מבחני השוואה.

שאלה 4

א. טור הפונקציה $S(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[0,\infty)$ לפי מבחן דיריכלה. ססכומים חלקיים $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ חסומים וסדרה של פונקציות $\frac{1}{\ln(n+1)+xn^2}$ יורדת ומתכנסת ל-0 במידה שווה בתחום $[0,\infty)$.

הסבר: אם $n<m$ אזי $\ln(n+1)+xn^2<\ln(m+1)+xm^2$

לכל $\max_{x\in[0,\infty)}\frac{1}{\ln(n+1)+xn^2}=\frac{1}{\ln(n+1)}$ ו- $\frac{1}{\ln(n+1)}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$

ובכן טור של פונקציות רציפות מתכנסת במידה שווה בתחום $[0,\infty)$ ולכן סכומו פונקציה $S(x)$ רציפה בתכום הזה.

ב. בדרך שלילה. אם טור של פונקציות רציפות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)+xn^2}$ מתכנסת במידה שווה בתחום $[0,\infty)$ אז כמו הוכח בכיתה טור יתכנס גם בקצה $x=0$ אבל טור מספרי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ מתבדר.
סתירה עם הנחה שטור מתכנס במידה שווה.

<u>דרך שניה:</u> אם טור של פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $(0,\infty)$ אזי $\sup_{x\in(0,\infty)}\left|\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ אבל אצלינו $\infty=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}\le\sup_{x\in(0,\infty)}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)+xn^2}\right|$ לכן טור לא מתכנס במידה שווה בתחום $(0,\infty)$

שאלה 5

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \lim_{\vartriangle x \to 0} \frac{\dfrac{\partial f(\vartriangle x,0)}{\partial y} - \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{\vartriangle x}$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{\vartriangle y \to 0} \frac{f(0,\vartriangle y) - f(0,0)}{\vartriangle y} = 0$$

אם $(x,y) \neq (0,0)$ אזי

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sin x \cos y \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \sin x \sin y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial f(\vartriangle x,0)}{\partial y} = \sin(\vartriangle x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{\vartriangle x \to 0} \frac{\sin(\vartriangle x)}{\vartriangle x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{\vartriangle y \to 0} \frac{\dfrac{\partial f(0,\vartriangle y)}{\partial x} - \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{\vartriangle y}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos x \sin y \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \sin x \sin y \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial f(0,\vartriangle y)}{\partial y} = -\sin(\vartriangle y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{\vartriangle x \to 0} -\frac{\sin(\vartriangle y)}{\vartriangle y} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

שאלה 6

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1 + 2x + y^2 = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx = 0;$$

א. $\Rightarrow 1. \quad x = 0, y = 1 \quad \textbf{or} \quad y = -1$

$$2. y = 0, x = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \quad \textbf{and} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \quad y = \pm 1$$

מקבלים $M_1(\frac{1}{2},0); M_2(0,-1); M_3(0,1)$ 3 נקודות סטציונריות

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$$

עבור $M_1(\frac{1}{2},0)$ נקודת מינימום $A>0$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\Delta > 0$

עבור $M_2(0,-1)$; נקודת אוכף $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; $\Delta = -\frac{1}{8} < 0$

עבור $M_3(0,1)$; נקודת אוכף $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; $\Delta = -\frac{1}{8} < 0$

ב. נחקור על השפה

אם $x=0$

1. $f(0,y)=1$

אם $y=\pm(x-1)$ אזי $y^2=(x-1)^2$

$$g(x)=1-x+x^2+(x-1)^2x;\ \ x\in[0,1]$$

$$g(x)=1-x^2+x^3;\ \ x\in[0,1]$$

מקבלים $$g'(y)=-2x+3x^2=0 \Rightarrow x=0, x=\frac{2}{3}$$

$$g(0)=1; g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{23}{27}\approx 0.85$$

$$f\left(\frac{1}{2},0\right)=\frac{3}{4}=0.75$$

ובכן פונקציה מקבלת בתחום הערך הכי קטן שווה ל- $\frac{3}{4}$ הערך היכ גדול שווה ל-1.