אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה: 07.07.2002
שם המורה: גולדשטיין, לוין,ליידרמן
מבחן ב: חדו"א א2
מס' הקורס: 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א', סמ': ב', מועד: א'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: אין

מס' הנבחן:______________

ענו על 5 השאלות מתוך 6.
כל שאלה שווה 02 נקודות.
תשובותיך תהיינה מלאה ומנומקצ היטב
נא לכתוב ברור ונקי.

השאלות:

1. נתונה פונקציה רציפה $f:[a,b]\to R$ רק שלכל תת-קטע $[c,d]\subset[a,b]$ $\int_c^d f(x)dx=0$. הוכח כי $f(x)=0$ לכל $a\le x\le b$.

2. מצא את כל הערכים הטבעים של n,m עבור p האינטגרל הלא אמיתי:

$$\int_1^\infty \frac{\sin^n(x)}{x^m}\,\mathrm{d}\,x$$

א. מתכנס בהחלט.
ב. מתכנס בתנאי.

נוסחת עזר $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

3. נסמן: $a_n=\int_0^n \sqrt[10]{1+x^5}\,dx,\ n=1,2,\ldots$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n}$$

חקור את ההתכנסות של הטור.

4. נתון טור החזקות $\sum_{n=1}^\infty (-1)nx^n$

א. מצא את רדיוס התכנסות של הטור.
ב. חקור את ההתכנסות בקצוות.

רמז: תשתמש בנוסחת טילור עבור e^x

5. נניח ש- $\varphi(z)$ ו- $\psi(z)$ פונקציות גזירות פעמיים. הוכח שלכל $a>0$ פונקציה $u(x,t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$ מקיימת את השיוות הבא: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

6. נתונה הפונקציה $f(x,y)=\dfrac{x^2+y}{x^2+y^2+1}$.

א. מצא את הנקודות אקסטרמום המקומי של הפונקציה וקבע את הסוגיהן
ב. מצא את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה בתחום הב א: $D=\left\{(x,y):x^2+y^2\le 1\right\}$

-בהצלחה-

<u>פתרון של המבחן מועד א' 2002</u>

<u>שאלה 1</u>

נניח בדך שלילה שקיימת נקודהש $x_0\in[a,b]$ $f(x_0)\neq 0$ בלי הגבלתי הכללי אפשר להניח ש- $f(x_0)>0$. ונקח $\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_0)$
$f(x)$ רציפה בקטע לכן קיים $\delta>0$ כך ש- $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$ לכן יש קטע $[c,d]\subset[a,b]$
כך ש- $x_0\in[c,d]$ ו- $f(x)>f(x_0)-\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_0)=\varepsilon$ לכל $x\in[c,d]$ ואז $\int\limits_c^d f(x)dx\geq\int\limits_c^d \varepsilon dx=\varepsilon(d-c)>0$.
סתירה עם הנתון ש- $\int\limits_c^d f(x)dx=0$. לכן לכל $x\in[a,b]$.

<u>שאלה 2</u>

אם $m\geq 2$ אזי לכל $\frac{|\sin^n(x)|}{x^m}\leq\frac{1}{x^2}$ ולכל $x\geq 1$ ולכל $n\geq 1$

ולכן אינטגרל $\int\limits_1^\infty \frac{\sin^n(x)}{x^m}\,\mathrm{d}x$ מתכנס בהחלט לפי מבחן ההשוואה.

נחקור מקרה של $m=1$.

נוכיח שלפי מבחן דיריכלה לכל $n=2k+1$ אי-זיגי אינטגרל $\int\limits_1^\infty \frac{\sin^n(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ מתכנס. ברור ש- $\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$ יורדת.

לכל a מתקיים $\left|\int\limits_1^a \sin^{2k+1}(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_1^a (1-\cos^2 x)^k\,\mathrm{d}(\cos x)\right|=\{t=\cos x\}=\left|\int\limits_{\cos 1}^{\cos a}(1-t^2)^k\,\mathrm{d}t\right|\leq\int\limits_{-1}^1 dt=2$

תנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן אינטגרל $\int\limits_1^\infty \frac{\sin^{2k+1}(x)}{x^m}\,\mathrm{d}x$ מתכנס.

נוכיח עכשיו שלכל $n=2k$ אינטגרל $\int\limits_1^\infty \frac{\sin^n(x)}{x^m}\,\mathrm{d}x$ מתבדר

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin^{2k}(x)}{x^m}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2^k}\int\limits_1^\infty \frac{(1-\cos 2x)^k}{x}\,\mathrm{d}x=\{t=2x\}=\frac{1}{2^k}\int\limits_2^\infty \frac{(1-\cos t)^k}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2^k}\int\limits_2^\infty \frac{\sum\limits_{i=1}^k \binom{k}{i}(-1)^i(\cos t)^i}{t}\,\mathrm{d}t=$$
$$=\frac{1}{2^k}\left\{\int\limits_2^\infty \frac{1}{t}dt-\sum_{i=1}^k\binom{k}{i}\int\limits_2^\infty \frac{(\cos t)^i}{t}\,\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^k\binom{k}{i}\int\limits_2^\infty \frac{(\cos t)^i}{t}\,\mathrm{d}t\right\}$$

$\int\limits_2^\infty \frac{1}{t}dt$ מתבדר באינסוף

$-\sum\limits_{i=1}^k\binom{k}{i}\int\limits_2^\infty \frac{(\cos t)^i}{t}\,\mathrm{d}t$:i אי-זוגים. מתכנס לפי חלק הקודם.

$\sum\limits_{i=1}^k\binom{k}{i}\int\limits_2^\infty \frac{(\cos t)^i}{t}\,\mathrm{d}t$:i זוגים. לפחות אי-שלילי.

ובכן $\int\limits_1^\infty \frac{\sin^{2k}(x)}{x^m}\,\mathrm{d}x=\infty$ כלומר מתבדר.

לכל $n=2k+1$ אינטגרל $\int_1^\infty \frac{\left|\sin^{2k+1}(x)\right|}{x}\,\mathrm{d}\,x$ גם מתבדר כי $\frac{\sin^{2k+2}(x)}{x} \geq \frac{\left|\sin^{2k+1}(x)\right|}{x}$ ו- $\int_1^\infty \frac{\sin^{2k+2}(x)}{x}\,\mathrm{d}\,x=\infty$ מתבדר

תשובה: אינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin^n(x)}{x^m}\,\mathrm{d}\,x$

א. מתכנס בהילט אם ורק אם $m \geq 2$

ב. מתכנס בתנאי אם ורק אם $m=1$ ו- $n=2k+1$ אי-גוגי

<u>שאלה 3</u>

$\sqrt[10]{1+x^5} \geq \sqrt{x}$ לכן $a_n \geq \int_0^n \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}n^{3/2}$ מפרר $a_n \leq \frac{3}{2}n^{-3/2}$ לכל $n=1,2,\ldots$ הטור $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}}$ מתכנס, לכן גם טור חיובי $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n}$ מתכנס.

<u>שאלה 4</u>

$e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ $x \to 0,$ לכן

א. $\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)n = \frac{1}{n}+\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n3}\right);$ $e^{\frac{1}{n^2}} = 1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right);$ וכן $a_n \sim \frac{1}{n}; n\to\infty$ ולכן $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$

ב. עבור $x=1$ מקבלים טור חיובי $\sum_{n=1}^\infty a_n$ הוא מתבדר כי הוא שקול לטור הרמוני .

עבור $x=-1$ מקבלים טור $\sum_{n=1}^\infty a_n(-1)^n$ עם סימן מתחלף

$$\sum_{n=1}^\infty a_n(-1)^n = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}(-1)^n + \sum_{n=1}^\infty\left[\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n3}\right)\right](-1)^n$$

$\sum_{n=1}^\infty\left[\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n3}\right)\right](-1)^n$ מתכנס בהחלט

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}(-1)^n$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ

לכן טור מתכנס ב- $x=-1$

<u>שאלה 5</u>

נסמן $u=x-at;\ v=x+at$. אזי לפי כלל שרשרת

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(-a);\ \ \frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial v}a;$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}a^2=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}a^2;\ \ \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}a^2=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}a^2$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

<u>שאלה 6</u>

א.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x\left(x^2+y^2+1\right)-2x\left(x^2+y\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}=\frac{2x\left(y-y+1^2\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1\left(x^2+y^2+1\right)-2y\left(x^2+y\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}=\frac{x^2-y^2+1-2yx^2}{\left(x^2+y^2+1\right)^2};$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=0\Rightarrow x=0$$
$$x=0\ \ and\ \ \frac{\partial f}{\partial y}=0\Rightarrow\ \ y=\pm1$$

לכן $M_1(0,1);M_2(0,-1)$ 2 נקודות סטציונריות

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2\left(y^2-y+1\right)\left(x^2+y^2+1\right)^2-8x^2\left(y^2-y+1\right)\left(x^2+y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^4}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\left(y^2-y+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\left(-2y-2x^2\right)\left(x^2+y^2+1\right)^2-4y\left(x^2-y^2+1-2yx^2\right)\left(x^2+y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^4}$$

עבור $M_1(0,1);$ נקודת אוכף $\begin{pmatrix}1/4 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix};\ \Delta=-\frac{1}{8}<0$

עבור $M_2(0,-1)$ נקודת מינימום $A>0$; $\begin{pmatrix}3/4 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix};\ \Delta=\frac{3}{8}>0$

ב. נחקור על השפה $x^2=1-y^2$.

$$g(y)=\frac{\left(1-y^2+y\right)}{2};\ \ y\in[-1,1]$$

מקבלים
$$g'(y)=\frac{-2y+1}{2}=0\Rightarrow y=\frac{1}{2}$$
$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8};g(-1)=-\frac{1}{2};g(1)=\frac{1}{2}$$

$g(-1)=-\frac{1}{2}$ - ערך הכי קטן $\qquad$ $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$ - ערך היכ גדול