אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה: 22.07.2001
שם המורה: פיינטוך, גיל, ליידרמן
מבחן ב: חדו"א א2
מס' הקורס: 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א', סמ': ב', מועד: ב'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: אין

מס' הנבחן: ______________

יש לענות על שאלה מס'1 ,
וכן על ארבע בדיוק מבין השאלות 2-6
לכל השאלה משקל זהה (20 נקודות) .
פטרו את שקוליכם ונמקו אותם.
נסחו במדויקתוצאות שעליהן הנכן מסתמכים..

השאלות:

1. (חובה) הוכח: אם $f\left(x\right)$ רציפה על $[a,b]$ אזי היא אינטגרבילית שם.

2. להוכיח שלכל טבעי k : $\int_1^\infty \frac{\cos^{2k+1} x}{x}dx$ מתכנס.

3. עבור איזה $\alpha \in \mathbb{R}$ מתכנס הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left[n(n+1)\right]^{1/n}-1\right)^{\alpha}$

4. נתונה הפונקציה g רציפה על $[0,1]$ כך ש- $g(1)=0$. הוכח שהסדרה $f_n(x)=x_n g(x)$ מתכנסת במדה שווה על $[0,1]$.

5. נתון הטור החזקות $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(\ln n)^p x^n}{\sqrt{1+x^2}}$. $p\in\mathbb{R}$ מצא את רדיוס ההתכנסות ובדוק את ההתכנסות בקצוות לכל $p\in\mathbb{R}$

6. נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2 arctg\dfrac{y}{x}-y^2 arctg\dfrac{x}{y}, xy\neq 0 \\ 0, xy=0\end{cases}$$

א.בדוק את רציפות של $f(x,y)$ ב- $(0,0)$

ב.הוכח שבראשית הצירים מתקיים ש

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

-בהצלחה-

פתרון של המבחן מועד ב' 2001

שאלה 2

$\int\limits_1^\infty \frac{\cos^{2k+1} x}{x} dx$ מתכנס.

נשתמש במבחן דיריכלה . מספיק להראות ש- $\left|\int\limits_1^a \frac{\cos^{2k+1} x}{x} dx\right|$ - חסום לכל k טבעי ולכל $a > 0$

$$\left|\int\limits_1^a \frac{\cos^{2k+1} x}{x} dx\right| = \left|\int\limits_1^a (1-\sin^2 x)^k \cos x dx\right| = \left\{\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix}\right\} = \left|\int\limits_{\sin 1}^{\sin a} (1-t^2)^k dt\right|$$

בגלל ש- $0 \le t^2 \le 1$, $\sin 1 \le t \le \sin a$ ולכן $0 \le (1-t^2)^k \le 1$. לכן $\left|\int\limits_{\sin 1}^{\sin a} (1-t^2)^k dt\right| \le \int\limits_{-1}^{1} 1 dt \le 2$.

שאלה 3

$$\left[n(n+1)\right]^{1/n} - 1 = e^{\frac{\ln[n(n+1)]}{n}} - 1$$

אם $t = \frac{\ln[n(n+1)]}{n}$ אזי $\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ ולכן הטור מתכנס אם ורק אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln[n(n+1)]}{n}\right)^{\alpha}$ מתכנס.

בגלל ש- $\frac{\ln[n(n+1)]}{n} > \frac{1}{n}$ הטור מתבדר אם $\alpha \le 1$

אם $\alpha > 1$ נקח $\varepsilon > 0$ כך ש- $\beta = \alpha - \varepsilon$ אז $\frac{\left(\ln[n(n+1)]\right)^{\alpha}}{n^{\alpha}} < \frac{c}{n^{\beta}}, c > 0 - const$ החל מ- n חסום ולכן הטור מתכנס עבור $1 < \alpha$ לפי מבחן השוואה.

נימוק $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\ln[n(n+1)]\right)^{\alpha}}{n^{\varepsilon}} = 0$ לכל $\varepsilon > 0$ ולכל α.

שאלה 4

בגלל ש- רציפה ו- לכל קיים כך שעבור ולכן לכל על הקטע חסומה ולכן קיים כך ש-. בגלל ש- ולכן קיים כך שעבור
מסקנה: עבור לכל ז"א במ"ש על

שאלה 5

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{1+(n+1)^2}}{\sqrt{1+n^2}} \left[\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]^p = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$$

ולכן רדיוס ההתכנסות שווה ל-1. הטור מתכנס עבור $-1 < x < 1$. צריך לבדוק את הקצוות.

כאשר $x = 1$ נקבל טור חיובי $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(\ln n)^p}{\sqrt{1+n^2}}$

אם $f(x) = \frac{(\ln x)^p}{\sqrt{1+x^2}}$ אזי ברור שעבור $p \le 0$ יורדת מונוטונית לאפס. עבור אבל צריך לבדוק שהיא יורדת

$$f'(x)=\frac{\frac{p(\ln x)^p}{x}\sqrt{1+x^2}-(\ln x)^p\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{(\ln x)^{p-1}}{x(1+x^2)^{3/2}}(p-\ln x)$$

עבור $x>e^p$ הביטוי הזה שלילי.

ולכן הטור מתכנס אם ורק אם האינטגרל $\int_3^\infty f(x)dx<\infty$, כלומר מותר להשתמש במבחן אינטגרל.

אבל $\int_3^\infty f(x)dx=\int_3^\infty \frac{(\ln x)^p}{\sqrt{1+x^2}}dx$ שקול ל- $\int_3^\infty t^p dt=\{t=\ln x\}=\int_3^\infty \frac{(\ln x)^p}{x}dx$

שמתכנס אם ורק אם $p<-1$

עבור $x=-1$ נקבל טור עם סימן מתחלף שמתכנס לפי מבחן לייבניץ כי $0\to \frac{(\ln n)^p}{\sqrt{1+n^2}}$ מונוטונית לכל p

תשובה: בקצה $x=1$ טור מתכנס עבור $p<-1$, בקצה $x=-1$ טור מתכנס לכל p.

שאלה 6

בגלל ש- $-\frac{\pi}{2}<arctg\ \alpha<\frac{\pi}{2}$ לכל α

$\frac{\pi}{2}\left(x^2+y^2\right)\geq|f(x,y)|$ ולכן $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y)=0=f(0,0)$ ופונקציה רציפה ב- $(0,0)$.

נחשב את הנגזרת החלקיות

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2 arctg\frac{y}{h}-y^2 arctg\frac{h}{y}}{h}=\lim_{h\to 0}\left[h\,arctg\frac{y}{h}\right]-y\lim_{h\to 0}\frac{arctg\frac{h}{y}}{\frac{h}{y}}=-y$$

($\lim_{t\to 0}\frac{arctg\ t}{t}=1$ לפי לופיטל)

באופן דומה $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}=1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{-k}{k}=-1$$