אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה: 01.07.2001
שם המורה: פיינטוך, גיל, ליידרמן
מבחן ב: חדו"א א2
מס' הקורס: 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א' , סמ': ב', מועד: א'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: אין

מס' הנבחן: ____________

יש לענות על שאלה מס'1 ,
וכן על ארבע בדיוק מבין השאלות 2-6
לכל השאלה משקל זהה (20 נקודות) .
פטרו את שקוליכם ונמקו אותם.
נסחו במדויקתוצאות שעליהן הנכן מסתמכים..

השאלות:

1. (חובה) הוכח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

אם $\{b_n\}$ סדרהשמתקבלת מ- $\{a_n\}$ ע"י שינוי סדר האבדים אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

2. חשבו את הגבול: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

3. לבדוק את ההתכנסות של $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

4. נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n+n^2x^2}$.

א. הוכח שטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n+n^2x^2}$ מתכנס לכל $x>0$ ופונקצית הגבול רציפה לכל $x>0$.

ב. הטור אינו מתכנס במדה שווה על $(0,+\infty)$

5. נתונה הפונקציה $f(x,y)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}y+xy$.

מצא את כל הנקודות האקסטרמום $f(x,y)$ ונמיין אותן.

א. מצא את המקסימום והמינימום המוחלט של $f(x,y)$

בעיגול $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2\}$

6. נתונה הפונקציה המוגדרת על $[0,\infty)$ כאשר עבור $0\le t\le 1$, $f(t)=\int_0^t\frac{1+2\sin\pi x\cos\pi x}{1+x^2}$

ונתון שעבור $1\le t$, $f''(1)=f''(t)$ קבועה.
חשב:

א. $f''(2)$
ב. $f'(1)$
ג. $f'(t)$ עבור $1<t$
ד. $f(t)-f(1)$ עבור $1<t$

-בהצלחה-

פתרון של המבחן מועד א' 2001

שאלה 1

נתון $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $t_n=\sum_{k=1}^{n}y_k$

ו- $S_n\xrightarrow[t_n\to t]{}S$ נקח $\varepsilon>0$ אזי קיים N כך ש $|S_n-S|<\varepsilon$ ובגלל ש $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס ניתן לבחור N כך ש-

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|-\sum_{n=1}^{N}|a_n|<\varepsilon$ ז"א $|a_{N+1}|+|a_{N+2}|+....<\varepsilon$ נקח M מספיק גדול כך ש- $a_1,...a_N$ מופיעים בתוך $b_1,...b_N$ לכן

$t_m-S_N, m>M$ עבור הוא סכום של חלק $\{a_i\}_N$ מ- כאשר בטור $a_1,...a_N$ אינם ... אז $|t_m-S_N|\le|a_{N+1}|+|a_{N+2}|+....$ לכן

עבור $m>N$:

$2\varepsilon=\varepsilon+\varepsilon>|S_N-t_m|+|s-S_N|\ge|s-S_N+S_N-t_m|=|s-t_m|=|\sum_{n=1}^{\infty}a_n-t_m|$ ולכן $t_m\to s$

שאלה 2

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\right)$$

$\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ כאשר $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$

זהו הסכום רימנה עליון עבור $\int_{1/n}^{1}\frac{1}{\sqrt{t}}dt$

סכום תחתון הוא $\sum_{k=2}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}$

לכן $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}\le\int_{1/n}^{1}\frac{1}{\sqrt{t}}dt\le\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}$

הפרש בין סכום העליון והתחתון הוא $0\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ לכן כולם שואפים לאותו גבול $\lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^{1}\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{t}}dt=2$

שאלה 3

$(\ln n)^{\ln n}$ היא מונוטונית עולה ולכן $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ היא מונוטוניץ יורדת לאפס וניתן להישתמש במבחן האינטגרלי הטור ותכנס אך ורק אם האינטגרל מתכנס.

דרך אחת לבדוק את זה-היא להסתקל על הטור המקדיל (שוב הפונקציה מונוטונית יורדת) $\sum\frac{e^n}{n^n}$. עבור הטור הזה

$a_n^{1/n}=\frac{e}{n}<1$ עבור $n>3$ ולכן הטור מתכנס.

שאלה 4

עבור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n+n^2x^2}$ אם נקח $a>0$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n+n^2x^2}\ge e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+n^2a^2}\ge e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2a^2}$ ולכן לפי מבחן ווירשטרס הטור מתכנס במדה שווה על $[a,\infty)$ ופונקצית רציפה ב- a.

עבור הטור $x=0$ מתבדר בגלל ש- $\frac{1}{n}\le\frac{e^{1/n}}{n}$. אם הטור מתכנס במדה שווה על $(0,\infty)$ אזי לפי ***Cauchy*** לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שעבור $n,m>N$ לכל $x>0$.

כאשר $x\to 0$ נקבל $\sum_{m+1}^{m}\frac{e^{1/n}}{n}\ge\varepsilon$ שסותר את העובדה שטור זה מתבדר.

<u>שאלה 5</u>

$$f(x,y)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}y+xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x^3+y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=y^3+x$$

אם נשווה לאפס נקבל: $-x^9+x=0,\ y=-x^3,$

$x^9-x=x(x^8-1)=x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$ אז $x=0,x=\pm1$. לכן צריך לבדוק $(0,0),(-1,1),(1,-1)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=3x^2,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=3y^2,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1,$ נותן שעבור $(0,0)$ $\Delta=-1$ ויש נק' אוכף. עבור שתי הנדודות האחרות $\Delta=8$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$

ולכן הן מינימום מקומי. בשני הן $f(x,y)=-\frac{1}{2}$. נבדוק את השפה.

על השפה $y=\sqrt{2}\sin t,x=\sqrt{2}\cos t,0\le t\le 2\pi$ מקבלים $g(t)=\cos^4 t+\sin^4 t+2\cos t\sin t=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\sin 2t-1\right)^2$

לכן מינים יהיה עבור $\sin 2t=-1$ ואז $g(t)=-\frac{1}{2}$. המקסומום יהיה עבור $\sin 2t=1$ ואז $g(t)=\frac{3}{2}$

לכן מינימום מוחלט בנקודות $(-1,1),(1,-1)$ והמקסימום ב- $2t=\frac{\pi}{2}$ ז.א. $t=\frac{\pi}{4}$ אז $(x,y)=(1,1)$ או $(x,y)=(-1,-1)$

<u>שאלה 6</u>

$$f'(t)=\frac{1+2\sin\pi t\cos\pi t}{1+t^2},0\le t\le 1$$

$$f''(t)=\frac{\left(1+t^2\right)2\pi\cos^2\pi t-\left(1+2\sin\pi t\cos\pi t\right)2t}{\left(1+t^2\right)^2}$$

$$f''(1)=\pi-\frac{1}{2}$$

א. בגלל ש- $f''(t)$ קבועה עבור $1\le t$, $f''(2)=\pi-\frac{1}{2}$

ב. $f'(1)=\frac{1+2\sin\pi\cos\pi}{2}=\frac{1}{2}$

ג. עבור $t \geq 1$, $f''(t)=\pi-\frac{1}{2} \Leftarrow f'(t)=\left(\pi-\frac{1}{2}\right)t+C = \int\left(\pi-\frac{1}{2}\right)dt$

$t=1$, $C=\frac{1}{2}-\left(\pi-\frac{1}{2}\right)=1-\pi \Leftarrow f'(t)=\left(\pi-\frac{1}{2}\right)(t-1)+\frac{1}{2}$

ד. $f(t)=\int f'(t)dt \Leftarrow f(t)=\left(\pi-\frac{1}{2}\right)\frac{(t-1)^2}{2}+\frac{1}{2}t=C$ לכן בגלל ש- $f(1)=\frac{1}{2}+C \Leftarrow C=f(1)-1$ ואז

$f(t)-f(1)=\left(\pi-\frac{1}{2}\right)\frac{(t-1)^2}{2}+\frac{1}{2}(t-1)$

ה.