אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה: 25.06.2000
שם המורה: מרקוס, גיל, אפרת, ליידרמן
מבחן ב: חדו"א א2
מס' הקורס: 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א', סמ': ב', מועד: א'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: אין

מס' הנבחן: ____________

יש לענות על שאלה מס'1 ,
וכן על ארבע בדיוק מבין השאלות 2-6
לכל השאלה משקל זהה (20 נקודות) .
פטרו את שקוליכם ונמקו אותם.
נסחו במדויק תוצאות שעליהן הנכן מסתמכים..

השאלות:

1. (חובה) הוכיחו את המבחן לייבניץ:

אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית השואפת באופן מונוטוני לאפס אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס.

2. מצאו עבור אילו הערכים של $\alpha>0$ מתכנס הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\alpha}$

3. חשבו את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n^2+k^2)-2\ln n\right)$$

4. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ב- $[1,\infty)$

נניח שקיים $0<C$ כך ש- $\left|\int_1^b f(x)dx\right|\le C$ לכל $1<b$. הוכיחו כי $\int_1^{\infty} f(x^{\alpha})dx$ מתכנס לכל $1<\alpha$

5. נתבונן בטור הפונקציות

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n+n^2x}$$

הוכיחו ש-

א. הטור מתכנס ב- $(0,+\infty)$ וסכומו רציף בתחום זה

ב. הטור מתבדר בנקודה $x=0$

ג. הטור אינו מתכנס במדה שווה ב- $(0,+\infty)$

6. נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^3+3xy^2-3x^2-3y^2$.

א. מצאו את הנקודות הקיצון של $f(x,y)$

ב. מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה בתחום הבא: $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$

-בהצלחה-

פתרון של המבחן מועד א' 2000

שאלה 2

$$\sqrt[n]{n}-1=n^{1/n}-1=e^{\frac{\ln n}{n}}-1\sim\frac{\ln n}{n},n\to\infty$$

מפני ש- $e^t-1\sim t$ עבור $t\to 0$

$$t=\frac{\ln n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

לכן לפי קריטריון השוואה מספיק לחקור את - $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\alpha}$

אם $\alpha\le 1$ אזי טור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\alpha}$ מתבדר כי $\frac{1}{n^{\alpha}}\le\frac{\ln^{\alpha} n}{n^{\alpha}}$ החל מ- $n\ge 3$ וטור מתבדר לכל $0<\alpha\le 1$

אם $0<\alpha$ אזי קיים $0<\varepsilon,\beta=\alpha-\varepsilon>1$. טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\beta}}$ מתכנס והחל מ- $n\ge n_0$ מסוים $\frac{\ln^{\alpha} n}{n^{\alpha}}<\frac{1}{n^{\beta}}$

כי $\ln^{\alpha} n<n^{\varepsilon}$ החל מ- $n\ge n_0$ מסויים.

<u>תשובה:</u> הטור מתכנס אם $0<\alpha$

שאלה 3

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n^2+k^2)-2\ln n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$$

נגדיר פונקצית עזר: $\varphi(x)=\ln\left(1+x^2\right)$

שרציפה בקטע $[0,1]$ וסכום למעל זה בעצם סכום אינטגרלי של רימן של $\varphi(x)$

קיים לכן $\int_0^1\ln\left(1+x^2\right)dx$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)=\int_0^1\ln\left(1+x^2\right)dx=\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]x\Big|_0^1-\int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}dx=$$

$$=\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]x\Big|_0^1-2(x-arctgx)\Big|_0^1=\ln 2-2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

שאלה 4

אינטגרל מתכנס לפי מבחן דיריכלה

$$\int_1^{\infty}f(x^{\alpha})dx=\left\{\begin{matrix}x^{\alpha}=t\\ dx=\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\alpha}\int_1^{\infty}f(t)\;t^{\frac{1}{\alpha}-1}\,dt$$

אזי $\frac{1}{\alpha}-1<0$ ו- $g(t)\searrow 0$ כאשר $t\to\infty$ (ידוע ש- $\frac{1}{g(t)}=t^{\beta}$ עולה לכל $\beta=1-\frac{1}{\alpha}>0$)

נתון ש- $\left|\int_1^b f(x)dx\right|\le C$ לכל $1<b$. לכל

לכן תנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ואינטגרל מתכנס.

<u>שאלה 5</u>

א. נוכיח שטור מתכנס במדה שווה בכל תחום $[a,+\infty)$. לכל $x\in[a,+\infty)$ מתקיים

$$\frac{\cos^2 n}{n+n^2x}\le\frac{1}{n^2a}$$

טור $\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס, לכן לפי מבחן ווירשטרס סכומו פונקציה רציפה ב- $[a,+\infty)$.

משום ש- $a>0$ שרירותי אזי סכומו הוא פונקציה רציפה לכל $x\in[0,+\infty)$.

ב. $\cos^2 n=\frac{1}{2}(1+\cos 2n)$, לכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - הטור הרמוני מתבדר

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה

ובכן טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}$ מתבדר

ג. נניח בשלילה שהטור מתכנס במידה שווה ב תחום $(0,+\infty)$. נרשום קריטריון קושי:

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\ n_0\quad \left|\sum_{k=n}^{n+l}\frac{\cos^2 k}{k+k^2x}\right|\le\varepsilon\quad \forall x>0,\quad \forall n\ge n_0,\forall l\in\mathbb{N}$$

נעבור לגבול כאשר $x\to 0$ ונקבל

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\ n_0\quad \left|\sum_{k=n}^{n+l}\frac{\cos^2 k}{k}\right|\le\varepsilon\quad \forall x>0,\quad \forall n\ge n_0,\forall l\in\mathbb{N}$$

זה בעצם קריטריון קושי עבור התכנסות של טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}$

לכן טור הזה מתכנס. סתירה עם סעיף ב.
לכן הנחה לא נכונה.

<u>שאלה 6</u>

א. קיימות $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+3y^2-6x;\frac{\partial f}{\partial y}=6xy-6y$ בכל מישור

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases};\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x=0\\(x-1)y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\x=0\end{cases}$$ או

אם $y=0$ אזי $x=0$ או $x=2$

אם $x=1$ אזי $y=\pm 1$

ובכן יש 4 נק' סטציונריות: $M_1(0,0);M_2(2,0);M_3(1,1);M_4(1,-1)$

נבדוק תנאי מספיק של אקסטרמום

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x-6;C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6x-6;B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6y$$

$$\Delta=AC-B^2=(6x-6)^2-(6y)^2$$

$$\max\ -\quad \Delta>0, A<0, M_1(0,0)$$

$$\min\ -\quad \Delta>0, A>0, M_2(2,0)$$

$$\boldsymbol{sadlle}\quad \boldsymbol{po}\text{int}\quad\begin{cases}\Delta<0, M_3(1,1)\\ \Delta<0, M_4(1,-1)\end{cases}$$

ב. נחקור על השפה $y^2=1-x^2$, $-1\le x\le 1$

$$g(x)=x^3+3x(1-x^2)-3x^2-3(1-x^2)=-2x^3+3x-3,\quad -1\le x\le 1$$

$$g'(x)=-6x^2+3=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$g\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{2}-3;g\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=-\sqrt{2}-3,g(-1)=-4,g(1)=-2$$

בעיגול נמצת רק אחת מהנקודות האקסטקמום $M_1(0,0)$ ו- $f(0,0)=0$.

מקבלים שערך הגדול ביותר הוא שווה ל- 0.

ערך הקטן ביותר הוא שווה ל- $-\sqrt{2}-3$