אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

מס׳ הנבחן:____________

תאריך הבחינה: 05.08.1999
שם המורה: מרקוס, גיל, אפר, ליידרמן,גולדשטיין
מבחן ב: חדו״א א2
מס׳ הקורס: 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א׳ , סמ׳: ב׳, מועד: ב׳
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: אין

יש לענות על שאלה מס׳1 ,
וכן על ארבע בדיוק מבין השאלות 2-6
לכל השאלה משקל זהה(20 נקודות) .
פטרו את שקוליכם ונמקו אותם.
נסחו במדויקתוצאות שעליהן הנכן מסתמכים.

השאלות:

1. (חובה) תהא $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ונגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ ל- x בקטע. הוכיחו כי $F(x)$ גזירה בקטע $[a,b]$ ומתקיימת $F'(x)=f(x)$.

2. עבור אליו ערכים של $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתכנס הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\left[1-\cos\frac{1}{n}\right]\cdot n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}$?

3. עבור איזה $p\in\mathbb{R}$ מתכנס האינטגרל $\int_1^{\infty}x^p\cos^2(e^x)dx$?

4. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ לכל n טבעי נגדיר $f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}$. מצא עבור אילו ערכים של α הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במדה שווה ב- $[0,1]$

5. נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2y\right)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq 0\\ 0, & (x,y)=0\end{cases}$.

א. האם $f(x,y)$ רציפה ב- $(0,0)$?

ב. חשבו את הנגזרות חלקיות של $f(x,y)$ ב- $(0,0)$.

ג. האם $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$?

6. חשבו את הסכו האינסוף $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

-בהצלחה-

פתרון של המבחן מועד ב' 1999

שאלה 2

אפשר לכתוב טור בצורה $\sum_{n=2}^{\infty}\left[2\sin^2\frac{1}{2n}\right]\cdot n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}$

נתבונן בטור-עזר $\sum_{n=2}^{\infty}n^{\alpha-2}(\ln n)^{\beta}$

אם $a_n=2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)\cdot n^{\alpha}(\ln n)^{\beta};b_n=n^{\alpha-2}(\ln n)^{\beta}$ אז $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)}{1/n^2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{2n}\right)}{1/2n}\right)^2=\frac{1}{2}$ (גבול סופי וחיובי)לפי משפט השוואה עבור טורים חיוביים, שני טורים מתכנסיםומתבדרים יחד. נעבור לחקירה של טור $\sum_{n=2}^{\infty}n^{\alpha-2}(\ln n)^{\beta}$

אם $\alpha>2$ הטור מתבדר כי $\lim_{n\to\infty}b_n=\pm\infty$. אם $\alpha=2$ אז הטור מתבדר לכל $\beta\in\mathbb{R}$ כי $(\ln n)^{\beta}>\frac{1}{n}$ החל ממקום מסוים, וטור הרמוני הוא מתבדר.

נניח עכשיו ש- $\alpha<2$ ונוכיח שפונקציה $f(x)=x^{\alpha-2}(\ln x)^{\beta}$ היא פינקציה יורדת (החל ממקום מסוים)

$$f'(x)=(\alpha-2)x^{\alpha-3}(\ln x)^{\beta}+x^{\alpha-2}\beta(\ln x)^{\beta-1}\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha-3}(\ln x)^{\beta-1}\left[(\alpha-2)\ln x+\beta\right]$$

ברור ש- $f'(x)<0$ כאשר $(\alpha-2)\ln x+\beta<0$ ז"א $\ln x>\frac{\beta}{2-\alpha}$ או $x>e^{\frac{\beta}{2-\alpha}}$. ממונוטוניות של $f(x)$ נובע שאפשר להשתמש במבחן אינטגרלי של קושי. מקבלים שטור $\sum_{n=2}^{\infty}n^{\alpha-2}(\ln n)^{\beta}$ מתכנס אם ורק אם מתכנס האינטגרל $\int_2^{\infty}x^{\alpha-2}(\ln x)^{\beta}dx$.

אם $-1<\alpha-2$ נבחר $\gamma\in(-1,\alpha-2)$. קל לבדוק ש- $x^{\gamma}<x^{\alpha-2}(\ln x)^{\beta}$ (החל ממקום מסוים).

אבל האינטגרל $\int_2^{\infty}x^{\gamma}dx$ מתבדר ($\gamma>-1$) ולכן גם האינטגרל מתבדר.

אם $-1>\alpha-2$ נבחר מספר $t\in(\alpha-2,-1)$. קל לבדוק ש- $x^{t}<x^{\alpha-2}(\ln x)^{\beta}$ (החל ממקום מסוים). האינטגרל $\int_2^{\infty}x^{t}dx$ ($t<-1$) מתכנס ולכן גם האינטגרל שלנו מתכנס

אם $-1=\alpha-2$ נקבל אינטגרל $\int_2^{\infty}\frac{(\ln x)^{\beta}}{x}dx$ ואם $\beta\neq-1$

$$\int_2^{M}\frac{(\ln x)^{\beta}}{x}dx=\frac{1}{\beta+1}(\ln x)^{\beta+1}\Big|_2^{M}$$

האינטגרל מתכנס אם $\beta<-1$ ומתבדר אם $\beta>-1$. במקרא $\beta=-1$ נקבל $\int_2^{M}\frac{(\ln x)}{x}dx=\ln(\ln x)\big|_2^{M}$ ואינטגרל מתבדר.

לסיכום: טור מתכנס אם ורק אם מתקיים אחד מהתנאים:

א. $\alpha<1$

ב. $\alpha=1;\beta<-1$

שאלה 3

החלפת משתנים: $e^x = y$ נקבל:

$$\int_1^\infty x^p \cos^2(e^x)dx = \int_e^\infty (\ln y)^p \cos^2(y)\frac{dy}{y}$$

עכשיו: $\int_e^\infty (\ln y)^p \cos^2(y)\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int_e^\infty \frac{(\ln y)^p}{y}dy + \frac{1}{2}\int_e^\infty \frac{(\ln y)^p}{y}\cos(2y)dy$

האינטגרל הראשון הוא מתכנס אם ורק אם $p<-1$. (ראה פתרון של מס'2) . נתבונן באינטגרל השני.

נוכיח שהוא מתכנס לכל $p\in\mathbb{R}$ לפי מבחן דיריכלה

$\int_e^M \cos(2y)dy = \frac{1}{2}\sin 2y\Big|_e^M$. ולכן $\left|\int_e^M \cos(2y)dy\right| \le 1$

קל לראות שפונקציה $(\ln y)^p$ היא יורדת מונוטונית החל ממקום מסוים (ראה פתרון של מס'2) לפי מבחן דיריכלה האינטגרל

$\int_e^\infty \frac{(\ln y)^p}{y}\cos(2y)dy$ מתכנס לכל $p\in\mathbb{R}$.

<u>לסיכום</u>, אינטגרל $\int_1^\infty x^p \cos^2(e^x)dx$ מתכנס אם ורק אם $p<-1$

שאלה 4

אם $x>0$ אז $\lim_{n\to\infty} n^\alpha x e^{-nx} = 0$ לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ ולכן $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$. ברור שזה נכון גם עבור $x=0$. התכנסות היא התכנסות במדה

שווה אם ורק אם $\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le 1}|f_n(x)-0|=0$ או $\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le 1} f_n(x)=0$

פונקציות $f_n(x)$ הן רציפות ולכן לפי משפט ווירשטרס הפונקציה מקבלת מקסימום בק טע $[0,1]$. נחשב $\max_{0\le x\le 1} f_n(x)$

$$f_n'(x) = n^\alpha e^{-nx} + n^\alpha x e^{-nx}(-n) = n^\alpha e^{-nx}(1-xn)=0$$

מקבלים נקודה סטציונרית $x=\frac{1}{n}$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\alpha-1}e^{-1}$. ערכים בקצוות:

$$f_n(0)=0,\quad f_n(1)=n^\alpha e^{-n}$$

עכשיו ברור ש- $\max_{0\le x\le 1} f_n(x) = n^{\alpha-1}e^{-1}$ ורואים שתנאי $\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le 1} f_n(x)=0$ מתקיים אם ורק אם $\alpha<1$

<u>תשובה:</u> $\alpha<1$

שאלה 5

א. $\left|f(x,y)-f(0,0)\right| = \frac{\left|\sin\left(x^2y\right)\right|}{x^2+y^2} \le \frac{\left|x^2y\right|}{x^2+y^2} \le \frac{\left|x^2y\right|}{x^2} = |y|$

מאי-שיוון נובע ש- $\lim_{x\to 0, y\to 0}\left(f(x,y)-f(0,0)\right)=0$

ולכן פונקציה $f(x,y)$ היא רציפה ב- $(0,0)$

ב.
$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$
$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{f(x,y)-f(0,0)}{y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0$$

נניח ש- $f(x,y)$ היא דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$. אז

$f(x,y)-f(0,0)=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x+\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}y+\alpha(x,y)x+\beta(x,y)y$ כאשר $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\alpha(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\beta(x,y)=0$

מ-(ב) נקבל $f(x,y)-f(0,0)=\alpha(x,y)x+\beta(x,y)y$ או $\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=\alpha(x,y)x+\beta(x,y)y$

עבור $y=x$ נקבל $\frac{\sin(x^3)}{2x^2}=\alpha(x,x)x+\beta(x,x)x$ או $\frac{\sin(x^3)}{x^3}=2(\alpha(x,x)+\beta(x,x))$

אבל $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{x^3}=1$ ו- $\lim_{x\to 0}(\alpha(x,x)+\beta(x,x))=0$

סתירה. ז"א שפונקציה $f(x,y)$ אינה דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$

שאלה 6

נתבונן בטור הנדסי: $(-1<x<1)$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$

נגזור: $(-1<x<1)$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$

נכפיל ב- x : $(-1<x<1)$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n}=\frac{x}{(1-x)^2}$

נגזור: $(-1<x<1)$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$

נכפיל ב- x : $(-1<x<1)$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n}==\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

נציב $x=\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n}==\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}=6\quad(-1<x<1)$$