אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה: 15.07.1999
שם המורה: מרקוס, גיל, אפר, ליידרמן,גולדשטיין
מבחן ב: חדו"א א2
מס' הקורס: 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א', סמ': ב', מועד: א'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: אין

מס' הנבחן:______________

יש לענות על שאלה מס'1 ,
וכן על ארבע בדיוק מבין השאלות 2-6
לכל השאלה משקל זהה(20 נקודות) .
פטרו את שקוליכם ונמקו אותם.
נסחו במדויקתוצאות שעליהן הנכן מסתמכים.

השאלות:

1. (חובה) תהא $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. הוכיחו כי $f(x)$ אינטגרבילית בקטע.

2.

א. (10 נק') חשבו: $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$

ב. (10 נק') חשבו את האורך העקום המוגדר ע"י:

$$y(x)=\int_0^x \sqrt{2t+t^2}dt; 0\le x\le 2$$

3. בדוק את התכנסות הטור:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)-\frac{1}{n}\right]^{2/3}$$

4. חשבו את תחום את התכנסות הטור - $\sum_{n=1}^{\infty}\left[arctg(n+1)-arctg(n)\right]\bullet n\bullet x^n$ (כולל בדיקת ההתכנסות, בדיקת קטע ההתכנסות)

5. נתונה הפונקציה $f(x,y)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}y^4+xy$.

א. מצא את כל הנקודות האקסטרמום המקומיות של $f(x,y)$ וקבע את טיבן.

ב. מצא את הערך מקסימלי והערך המינימלי הפונקציה ברבוע: $-1\le x,y\le 1$

6. נניח כי $a_n>0; n=1,2,3...$. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנסת אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

- בהצלחה-

פתרון של המבחן מועד א' 2000

שאלה 2

א. קודם כל נשים לב ש- $\int_0^\infty e^{t^2}dt=\infty$ - $\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{t^2}dt=$ ידוע גם ש- $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{x}=\infty$. לכן מותר להשתמש בכלל לופיטל :

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{t^2}dt=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x^{-1}e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)'}{\left(x^{-1}e^{x^2}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}\left(-\frac{1}{x^2}+2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{2}$$

ב. $L=\int_0^2\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$

לפי נוסחת ניוטון-לייבניץ $y'(x)=\sqrt{2x+x^2}$

$$L=\int_0^2\sqrt{1+2x+x^2}dx=\int_0^2(x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x\Big|_0^2=4$$

שאלה 3

נרשום טור טיילור עבור פונקציה $f(t)=\ln(1+t)$

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-...$$

מתכנס כאשר $-1<t<1$. זנ הטור עם סימן מתחלף, לכן עבור $|t|<1$; $\left|\ln(1+t)-t\right|\le\frac{t^2}{2}$ (*)

$$\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)=\ln\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-1}\right)=-\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)=-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

לפי(*)

$$(*)\quad\left|-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right|=\left|\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\left(-\frac{1}{n}\right)\right|\le\frac{1}{2n^2};\quad n\ge 2$$

ובכן $\left|\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)-\frac{1}{n}\right|^{2/3}\le\frac{1}{n^{4/3}}$ טור $\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n^{4/3}}$ מתכנס לפי רקיטריון השוואה. הטור חיובי $\sum_{n=2}^\infty\left[\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)-\frac{1}{n}\right]^{2/3}$ גם מתכנס.

שאלה 4

לפי משפט לגרנז' $arctg(n+1)-arctg(n)=arctg'(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2}$ כאשר $n<\xi<n+1$ לכן עבור $n\to\infty$

$$0<arctg(n+1)-arctg(n)\sim\frac{1}{1+n^2}\sim\frac{1}{n^2}$$

נוסחת דאלמבר $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}:\frac{1}{n+1}\right)=1$.

נחקור בקצוות.

בקצה $x=1$ מקבלים טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty}\left[arctg(n+1)-arctg(n)\right]\bullet n$. הוכחנו ש- $\left(arctg(n+1)-arctg(n)\right)^n\sim\frac{1}{n};n\to\infty$ עבור

לכן טור שלנו מתבדר לפי קריטריון ההשוואה כמו טור הרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

בקצה $x=-1$ מקבלים טור עם סימנים מתחליפים $\sum_{n=1}^{\infty}\left[arctg(n+1)-arctg(n)\right]\bullet n\bullet(-1)^n$.

נבדוק שתנאים של מבחן לייבניץ מתקיימים ולכן הוא מתכנס.

ראינו כבר $\lim_{n\to\infty}\left[arctg(n+1)-arctg(n)\right]\bullet n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ עכשיו מונוטונית

נגדיר פונקצית עזר: $\varphi(t)=\left[arctg(t+1)-arctg(t)\right]t$

$$\varphi'(t)=\left(\frac{1}{1+(t+1)^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)t+\left[arctg(t+1)-arctg(t)\right]$$

אבל $arctg(t+1)-arctg(t)=\frac{1}{1+\xi^2}<\frac{1}{1+t^2}$ כי $t<\xi<t+1$

לכן
$$\varphi'(t)<\frac{\left(1+t^2\right)-\left(1+(t+1)^2\right)}{\left(1+(t+1)^2\right)\left(1+t^2\right)}+\frac{1}{1+t^2}<\frac{1}{1+t^2}\left(\frac{\left(1+t^2+2+2t-t^2\right)t+\left(t^2+2t+2\right)}{t^2+2t+2}\right)=$$
$$=\frac{1}{1+t^2}\frac{-t^2+t+2}{t^2+2t+2}=-\frac{(t+1)(t-1)}{\left(1+t^2\right)\left(t^2+2t+2\right)}<0$$

לכל $t>2$

ובכן $\varphi'(t)<0$ עבור $t>2$ ואזי $\varphi(t)$ יורדת מונוטונית עבור $t>2$

תשובה: טור מתכנס בתחום $[-1,1]$

שאלה 5

א. קיימות $\frac{\partial f}{\partial x}=x^3+y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=y^3+x$ בכל מישור

או
$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases};\Rightarrow\begin{cases}y=-x^3\\ -x^9+x=0\end{cases}\Rightarrow x=0,x=-1,x=1;$$

ובכן יש 3 נק' סטציונריות: $M_1(0,0); M_2(1,-1); M_3(1,1);$

נבדוק תנאי מספיק של אקסטרמום

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=3x^2; C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=3y^2; B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=1$$

$$\text{sadlle point}:\quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad \Delta<0, M_1(0,0)$$

$$\min:\quad \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\quad \begin{cases}\Delta>0, M_3(1,1)\\ \Delta>0, M_2(1,-1)\end{cases}$$

ב. נחקור על השפה

$$-1\le y\le 1, x=1$$

$$g(y)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}y^4+y$$

$$g'(y)=y^3+1=0\Rightarrow y=-1$$

$$-1\le y\le 1, x=-1$$

$$g(y)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}y^4-y$$

$$g'(y)=y^3-1=0\Rightarrow y=1$$

$$-1\le x\le 1, y=-1$$

$$g(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^4-x$$

$$g'(x)=x^3-1=0\Rightarrow x=1$$

$$-1\le x\le 1, y=1$$

$$g(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^4+x$$

$$g'(x)=x^3+1=0\Rightarrow x=-1$$

מסטבר שערך הכי גדול והכי קטן פונקציה $f\left(x,y\right)$ יכולה לקבל רק ברודקודים של ריבוע :

- $f(1,-1)=f(-1,1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-1=-\frac{1}{2}$ - ערך הכי קטן

$f(-1,-1)=f(1,1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1=\frac{3}{2}$ ערך הכי גדול

<u>שאלה 6</u>

נתון ש- $a_n > 0$ לכן $\frac{a_n}{1+a_n} < a_n$ לכל n אזי לפי קריטריון השוואה התכנסות של טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ גוררת התכנסות של טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$. כיוון הפוך : נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס. אזי לפי תנאי החרכי $\frac{a_n}{1+a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ אבל $1+a_n > 1$ לכן $a_n \to 0$.

מסטבר שטורים חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ שקולים.

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n : \frac{a_n}{1+a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+a_n\right) = 1$$

סופית: טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ גם מתכנס כמו $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$